Approximationen oder: Ganz nah dran an Excel

Excelstammtisch vom 11.05.2021

(zusammengefasst von René Martin)

1. Iterationen

Eigentlich kann Excel keinen Zirkelbezug. Oder doch?

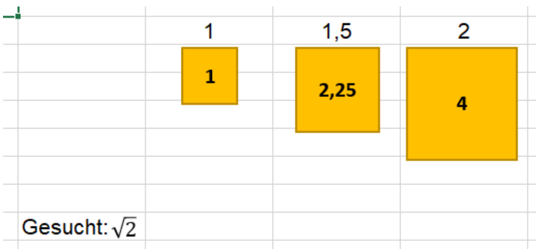
1.1. Beispiel I: Bisektionsverfahren

Ein einfaches, aber leicht verständliches Näherungsverfahren (es wird Bisektionsverfahren oder Intervallhalbierung in der Mathematik genannt) funktioniert folgendermaßen: Angenommen auf einem Taschenrechner befindet sich keine Wurzelfunktion. Man möchte jedoch die $\sqrt{2}$ berechnen. Der gesuchte Wert muss zwischen 1 und 2 liegen, da $1^2 = 1 < 2$ und $2^2 = 4 > 2$. Also werden in zwei Zellen die Startwerte 1 und 2 eingetragen. In einer dritten Zelle wird der Mittelwert berechnet, also entweder

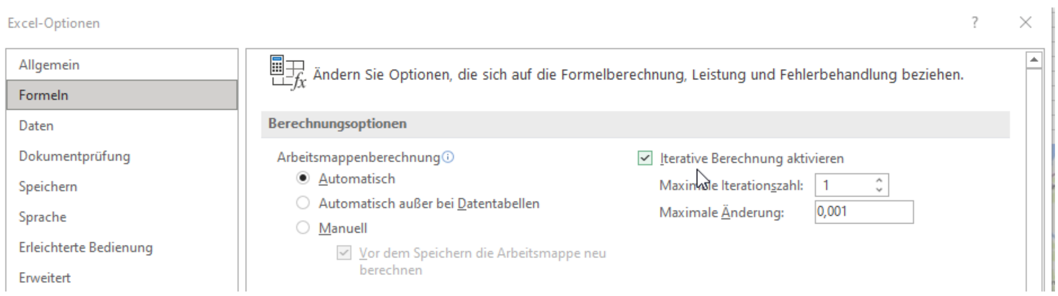
```
=MITTELWERT(B1;B3)
```

oder

```
=(B1+B3)/2
```



Von allen drei Werten wird das Quadrat berechnet. Nun ist die Frage, ob der gesuchte Wert zwischen 1 und 1,5 oder zwischen 1,5 und 2 liegt. Mit einer Wenn-Funktion wird überprüft, ob $1{,}5^2>2$. Ist dies der Fall, dann wird als neuer Startwert für die Untergrenze die 1 verwendet, andernfalls die 1,5. Analog für die Obergrenze: Entweder lautet der neue Startwert 1,5 oder 2. Diese beiden Werte werden als Startwerte in die Tabelle „eingespeist“. Jedoch Achtung: Wenn man einen Bezug auf die letzte Zelle herstellt, erhält man einen Zirkelbezug. Um den Endwert zu übernehmen, müssen über die Excel-Optionen | Iterative Berechnungen aktiviert werden.



Nun kann man statt der 1 den Bezug auf den Wert der Untergrenze herstellen, statt der 2 den Wert der Obergrenze. Man aktualisiere die die Berechnung mit der Funktionstaste [F9] und erhalte einen beliebig genauen Näherungswert.

Tipp

Lasse viele Dezimalstellen anzeigen!

Hinweis

Die Standardschrittweite ist auf 100 eingestellt. Beim Start der Iteration, berechnet Excel die ersten 100 Schritte, mit jeder Aktualisierung ([F9]) weitere 100 Schritte. Man kann die Schrittweite verkleinern (beispielsweise auf 1), um besser den Rechenprozess zu verfolgen. Wenn man wissen möchten, wie viele Schritte Excel bereits berechnet hat, dann trage in einer Zelle (beispielsweise D2) den Bezug =D2+1 ein. Dort wird der Wert von D2 um eins erhöht:

```
=D2+1
```

In der Mathematik sind wesentlich bessere Näherungsverfahren bekannt. Wenn ein brauchbarer Startwert vorliegt, dann kann das Newtonsche (Tangenten-) Näherungsverfahren verwendet werden. Man beginnt mit einem Startwert und berechnet

$f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$

Der neue Startwert $\varphi(x)$ ergibt sich aus:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

wenn die Lipschitzbedingung gilt:

$$\varphi'(x) = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq 0,2$$

Beispielsweise hat

$f(x) = x^3+2x-6$

in der Nähe von 1,5 eine Nullstelle.

$f(x) = x^3+2x-6 \Rightarrow f(1,5) = 0,375$

$f'(x) = 3x^2+2 \Rightarrow f'(1,5) = 8,75$

$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1,5) = 9$

Die Lipschitzbedingung ist erfüllt:

$$\left| \frac{f(1,5) \cdot f''(1,5)}{(f'(1,5))^2} \right| = \left| \frac{0,375 \cdot 9}{8,75^2} \right| \approx 0,044$$

Also wird ein eine Zelle, beispielsweise in D1 der Wert 1,5 eingetragen. In D2 wird $f(x)$ berechnet:

```
=D1^3+2*D1-6
```

in E2 $f'(x)$, nämlich:

```
=3*D1^2+2
```

Der Quotient =D2/E2 steht in D4. In D5 wird die Differenz

```
=D1-D4
```

berechnet.

In den Excel-Optionen kann nun die maximale Iterationsanzahl auf 1 gesetzt werden, bevor in D1 ein Bezug auf die letzte Zelle (D5) gesetzt wird. Das mehrmalige Drücken der Taste [F9] zeigt schöne die schnelle Iteration.

Ein weiteres bekanntes und beliebtes Rechenverfahren ist die Sekantenmethode oder Regula falsi. Hier benötigt man keine Ableitung und nicht notwendigerweise einen brauchbaren Startwert. Lediglich zwei Anfangswerte sind notwendig: x_0 und x_1. Der nächste Wert x_2 berechnet sich aus:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \cdot f(x_1)$$

Stehen beispielsweise in I1 und J1 die Startwert 1 und 2, dann wird berechnet:

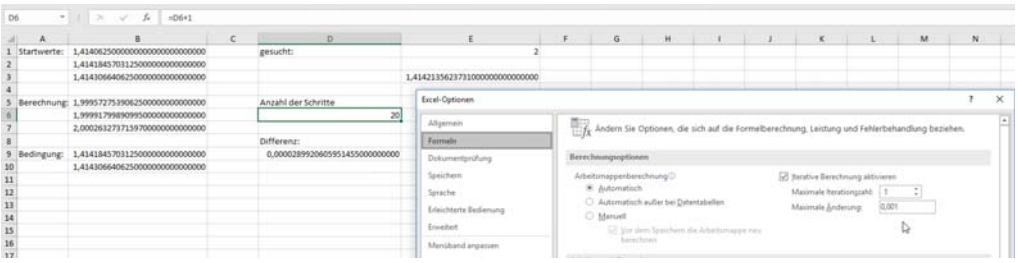
```
=I1-((I1-J1)/((I1^3+2*I1-6)-(J1^3+2*J1-6)))*(I1^3+2*I1-6)
```

Nachdem in den Excel-Optionen die maximale Iterationsanzahl auf 1 gesetzt wurde, kann entweder I1 oder J1 auf die Zielzelle verweise. [F9] zeigt die einzelnen Schritte an.

Weitere Nährungsverfahren findet man in jeder Formelsammlung, beispielsweise das Pegasus-Verfahren, den Fixpunktsatz oder das Verfahren von Muller.

Sudokus muss man also programmieren oder „per Hand“, das heißt im Kopf und mit viel Papier lösen. Sie finden eine programmierte Lösung im Downloadmaterial.

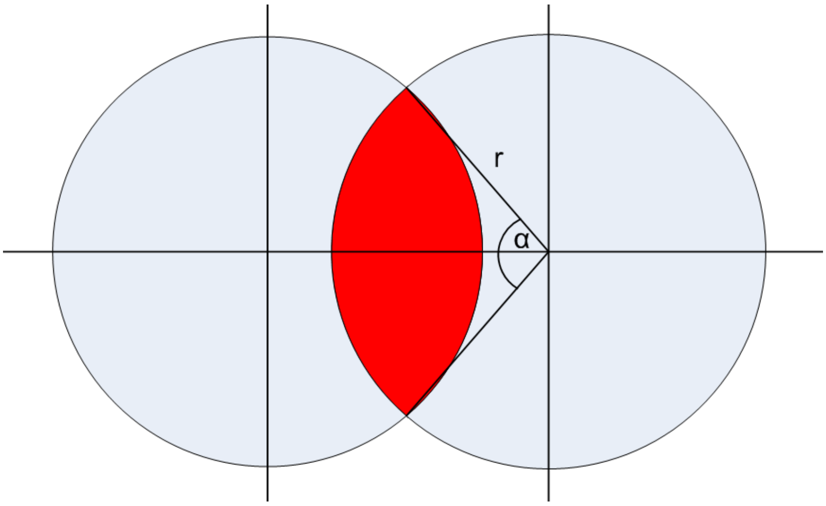
Dagegen lassen sich eine Reihe von finanzmathematischen oder technischen Aufgaben mit Hilfe von Iterationen berechnen. Gerade im Bereich von Wachstumsproblemen oder Zins- und Tilgung ist dies ein einfaches, aber effizientes Hilfsmittel:



1.2. Beispiel II: Näherungslösung

Die Frage bleibt: wer macht denn so etwas? – eine Wurzel, einen Sinus oder Logarithmus per Näherungsverfahren zu berechnen. Dafür braucht man das Bisektionsverfahren sicherlich nicht. Jedoch gibt es in der Mathematik, in Naturwissenschaften, aber auch in kaufmännischen Berechnungen einige Rechenanweisungen, die mit der klassischen Mathematik nicht mehr zu lösen sind. Ein kleines Beispiel aus der Mathematik:

Wie weit muss man zwei Bierdecke übereinander schieben, damit die gemeinsame Fläche halb so groß ist wie die Fläche eines Bierdeckels?



Ein Blick in die Formelsammlung zeigt, dass die Fläche eines Kreises berechnet wird über:

$$F = \pi \cdot r^2$$

und dass andererseits das Kreissegment die Fläche hat:

$$F = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

Daraus ergibt sich:

$$\alpha - \sin(\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

Der Winkel α kann nur mit einem der oben beschriebenen Näherungsverfahren berechnet werden – er liegt bei 2,309881 oder als Gradzahl bei 132,346°. Dies zu berechnen sei dem geneigten Leser und der geneigten Leserin überlassen.

Und damit kann man die Abstände der Mittelpunkte der Bierdeckel berechnen:

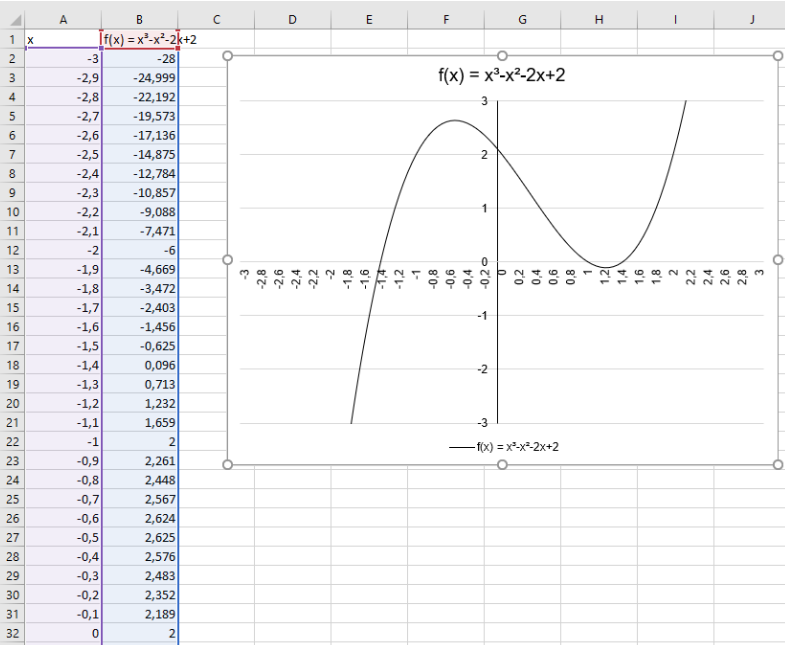
$$l = 2 \cdot (r - r \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})) \approx 1{,}19 \cdot r$$

2. Zielwertsuche

Sicherlich kann Excel das Rechnen der (Schul-)mathematik nicht abnehmen. Aber zur Überprüfung von Ergebnissen ist es ein hervorragendes Werkzeug! Ein Beispiel aus der Kurvendiskussion. Gegeben sei eine Funktion

```
f(x) = x³ - x² -2x +2
```

Würde man in Excel für einige Werte den Funktionswert berechnen lassen und sich den Graphen ansehen, so käme man zu folgendem Ergebnis:



Eine Funktion

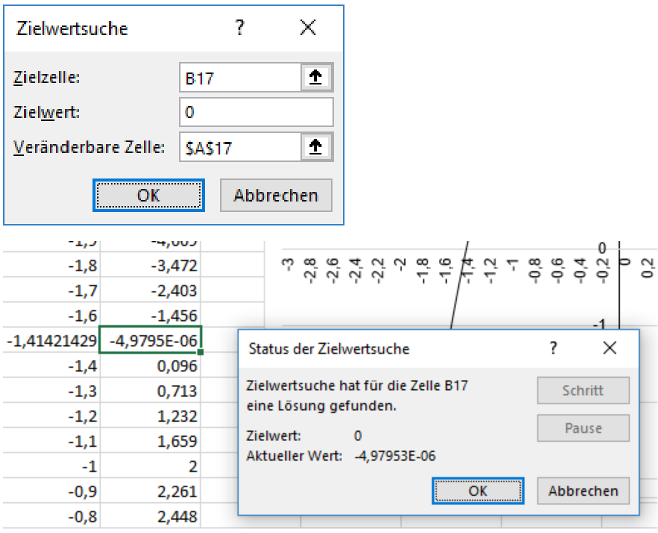
Gesucht sind die Nullstellen, die per Diagramm schnell mit $x_1 \approx -1{,}4$, $x_2 \approx 1$ und $x_3 \approx 1{,}4$ ermittelt sind. Excel kann sie ebenfalls finden. Das Hilfsprogramm hierzu lautet Zielwertsuche und befindet sich im Register Daten | Prognose | Was-wäre-wenn-Analyse.

In einer Zelle (A12) steht ein beliebiger Wert, beispielsweise -2. Das Ergebnis der Formel

```
=A2^3-A2^2-2*A2+2
```

ergibt -6. Damit kann x_1 von links gesucht werden, da f(x) stetig ist.

Sie finden die Zielwertsuche in der Kategorie Daten.



Die Zielwertsuche

Die Zielzelle der Zielwertsuche lautet B12 (die Zelle, in der sich die Formel befindet), der Zielwert beträgt 0 und die veränderbare Zelle A12. Für den Wert -1,41424260419948 findet die Zielwertsuche den Zielwert -0,00019831441685314. Das heißt: Das Ergebnis wird nicht bei 0, sondern bei einer Abweichung von -0,00019831441685314 gefunden; das korrekte Ergebnis weicht vom exakten Wert $-\sqrt{2}$ um -0,0000290418263850789 ab. Beginnt man die Zielwertsuche bei 0,5, dann erhält man 0,999382613475808 mit einer Abweichung von 0,00061738 vom exakten Wert. Ähnliches passiert beim Startwert 2.

Es nützt nichts, den Startwert möglichst nahe an den gesuchten Wert zu setzen – die Zielwertsuche bricht ab, sobald ein Grenzwert unterschritten wird.

Zwar liefert die Zielwertsuche bei Dezimalstellen keine exakten Werte, aber als Instrument zur Überprüfung von tatsächlichen Werten ist es brauchbar. Denn: Damit können schnell Gleichungen, wie wir sie im Algebra-Unterricht der Klassen 7 und 8 geübt haben, gelöst werden. Mit Hilfe der Zielwertsuche findet man die Lösung von:

```
-12x+ 10 = 16x- 88 ⇒ x = 3,5
```

Aber auch:

$$\frac{x+4}{x} = \frac{x}{x-3}$$

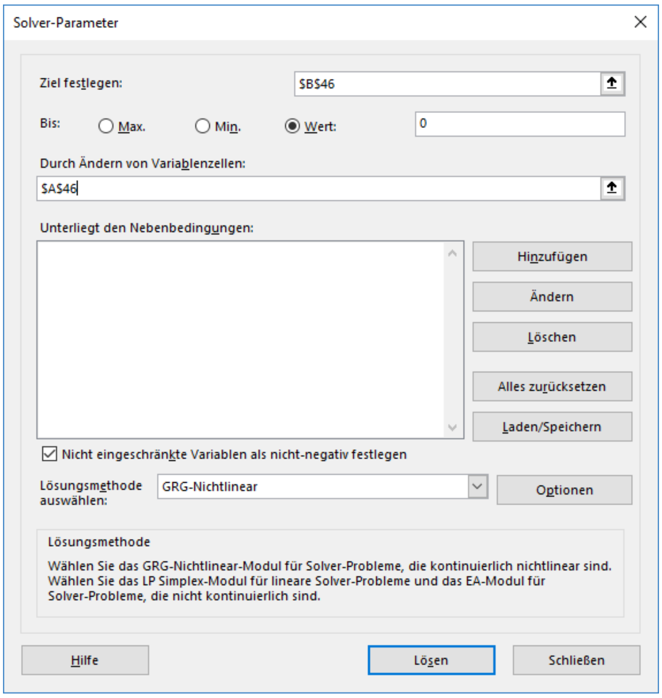
findet fast den korrekten Wert L = {12}

Hinweis

Übrigens: der Zielwertsuche gelingt es Werte in Zellen zu schreiben, in denen eine Datenüberprüfung festgelegt wurde. Wurde beispielsweise über Daten | Datenüberprüfung nur ganze Zahlen für eine Zelle festgelegt, dann kann die Zielwertsuche dennoch Dezimalzahlen in diese Zelle schreiben.

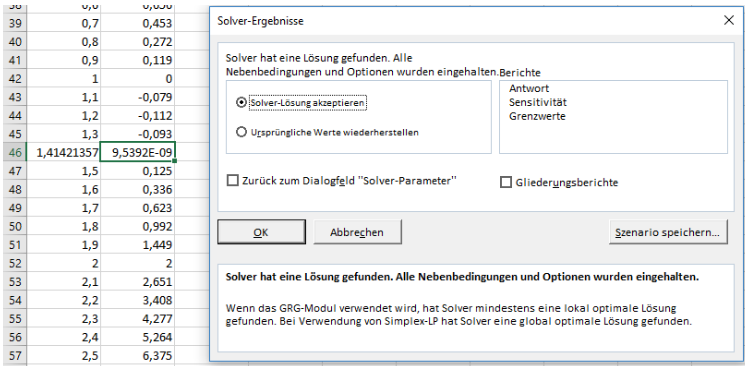
3. Der Solver

Die gleiche Aufgabe – die Suche nach Nullstellen – könnte auch der Solver lösen. Das Add-In muss über die Excel-Optionen | Add-Ins hinzugefügt werden und erscheint danach als Symbol im Register „Daten“. Die Werte werden ähnlich der Zielwertsuche wie folgt eingegeben:



Der Solver

Ein Klick auf „Lösen" berechnet das Ergebnis der Aufgabe. Und das genauer als die Zielwertsuche.



Das Solver-Ergebnis

Noch bessere Ergebnisse werden erzielt, wenn man unter den Optionen die Höchstzeit und die Anzahl der Iterationen vergrößert und die Genauigkeit und Toleranz verkleinert. Man kann auch von der anderen Seite suchen lassen und erhält so beliebig genaue Werte:

Die Aufgabe des Solvers ist nicht nur, per Iteration einen Zielwert zu finden, sondern auch ein (lokales oder globales) Maximum oder Minimum zu bestimmen. Um den Extremwert zu bestimmen, müssen lediglich statt des Zielwerts Maximum oder Minimum eingeschaltet werden. Wird das (lokale) Minimum gesucht, dann sollte man als Nebenbedingungen J2<=2 und J2>=0 festlegen, da sich die Lösung in diesem Intervall befindet. Der Solver findet als Lösung 1,21525043201209, die Abweichung von der korrekten Lösung

$$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

beträgt 0,00000000500944. Also auch hier leistet der Solver – ebenso wie die Zielwertsuche – gute Dienste um tatsächlich berechnete Werte zu überprüfen.

Der Solver besitzt hinter der Schaltfläche „Optionen" eine Reihe von Einstellungen:

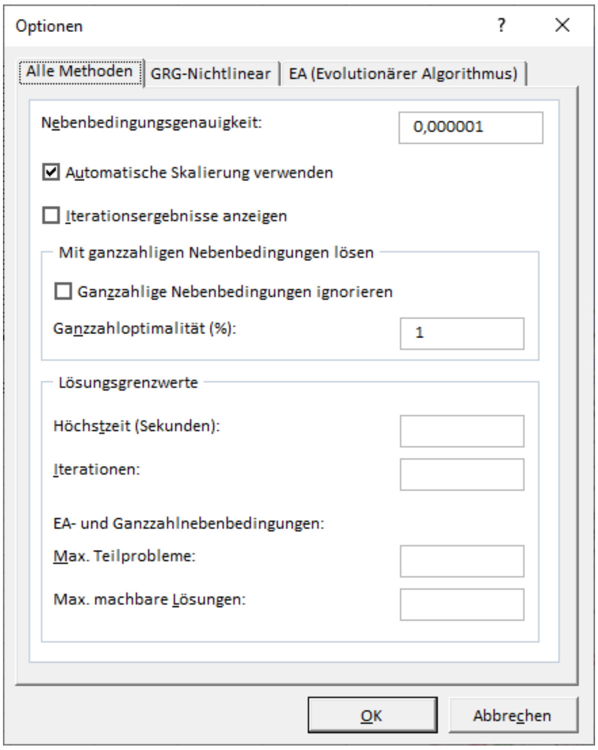
3.1. Lösungsmethoden des Solver

Mit der Methode **Simplex LP** können Sie ausschließlich lineare Modelle lösen, d.h. Modelle mit einer Zielfunktion und Nebenbedingungen ersten Grades. Lineare Modelle können grafisch im R2 (2 Optimierungsvariablen x1, x2) als Punkte und Geraden, im R3 (3 Optimierungsvariablen x1, x2, x3) als Punkte, Geraden und Ebenen dargestellt werden. Optimierungsmodelle mit 4 und mehr Entscheidungsvariablen sind grafisch nicht mehr darstellbar. Die Simplex-Methode liefert uns immer ein globales Optimum, d.h. es gibt kein besseres Ergebnis zu unserem Optimierungsproblem.

Die Bezeichnung **GRG** steht für Generalized Reduced Gradient und ist ein langjährig erprobtes und zuverlässiges Verfahren. Damit können Sie auch lineare Modelle lösen, wobei zu berücksichtigen ist, dass man zur Lösung linearer Probleme mehr Rechenzeit braucht. Die Methode GRG-Nichtlinear wird eingesetzt wenn die Zielfunktion und/ oder eine der Restriktionen nicht mehr linear sind, d.h. bei Funktionen ab dem 2. Grad (x^2) bzw. Wurzelfunktionen. Eine weitere wichtige Voraussetzung für den Einsatz dieses Verfahrens ist, dass die Graphen aller mathematischen Gleichungen bzw. Funktionen und deren Ableitungen keine Ecken oder Sprungstellen aufweisen. Die Lösungsroutine dieses Verfahrens sucht sich beim Start einen beliebigen Punkt auf dem Graphen. Jedes Mal wenn Sie den Algorithmus neu starten, wählt das Verfahren einen neuen Startpunkt, der leicht vom Vorherigen abweicht. Dadurch erhalten Sie ggf. auch verschiedene Ergebnisse. Um diesen Ablauf zu beschleunigen, bietet uns die Dialogbox die Möglichkeit, sogenannte Multistarts oder Mehrfachstarts durchzuführen. Dies erhöht die Chance, ein globales Optimum zu finden. Das Verfahren liefert uns nur dann ein globales Optimum, wenn alle Funktionen nur ein Maximum bzw. Minimum besitzen, d.h. wenn sie konvex sind. Andernfalls liefert uns diese Methode nur ein lokales Optimum. Beispiele zu dieser Lösungsmethode finden Sie im Kapitel 7.6. □ Der evolutionäre Code basiert auf genetischen Algorithmen und kann z.B. auch Nachschlage- und Verweisfunktionen aus Kapitel 4 dieses Buches verarbeiten. Diesen Algorithmus hat John Holland (University of Michigan) in den frühen 70er entwickelt, indem er den Ablauf von Anpassungs- und Entwicklungsprozessen der natürlichen Evolution auf Optimierungsprobleme übertragen hat. Er prägte den Begriff genetic Algorithm.

Die **EA-Methode (Evolutionärer Algorithmus)** wird dann eingesetzt, wenn der Zielfunktionswert von unstetigen und nicht-glatten Excel-Funktionen abhängt. Unstetige Excel-Funktionen sind z. B.: INDEX(), WVERWEIS(), SVERWEIS(), VERWEIS(), GANZZAHL(), RUNDEN(), ANZAHL(), OBERGRENZE(), UNTERGRENZE(), WENN(), WAHL(), NICHT(), UND() und ODER(). Nicht-glatte Excel-Funktionen (non-smooth functions) sind z.B.: MIN(), MAX() und ABS() mit Knicken im Funktionsgraphen. Diese Methode kann für alle Optimierungsprobleme eingesetzt werden, arbeitet aber für Lineare und Nichtlineare Optimierungsprobleme weit weniger effizient.

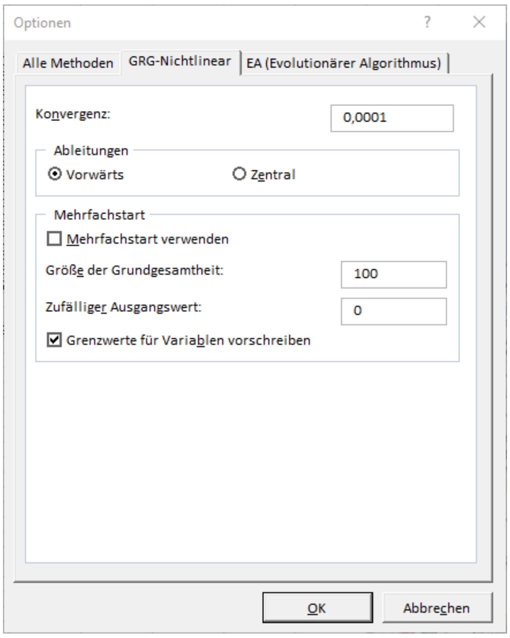
3.2. Die Optionen des Solvers



Alle Methoden beinhaltet folgende Parameter

Bedingung	**Erklärung**
Nebenbedingungsgenauigkeit (Constraint Precision)	Dieser Parameter wird durch eine Zahl zwischen Null und Eins bestimmt. Je kleiner dieser Wert ist, desto genauer arbeitet der Solver. Vorbesetzt ist der Wert 0,000001. Dieser Wert legt fest, wie groß die

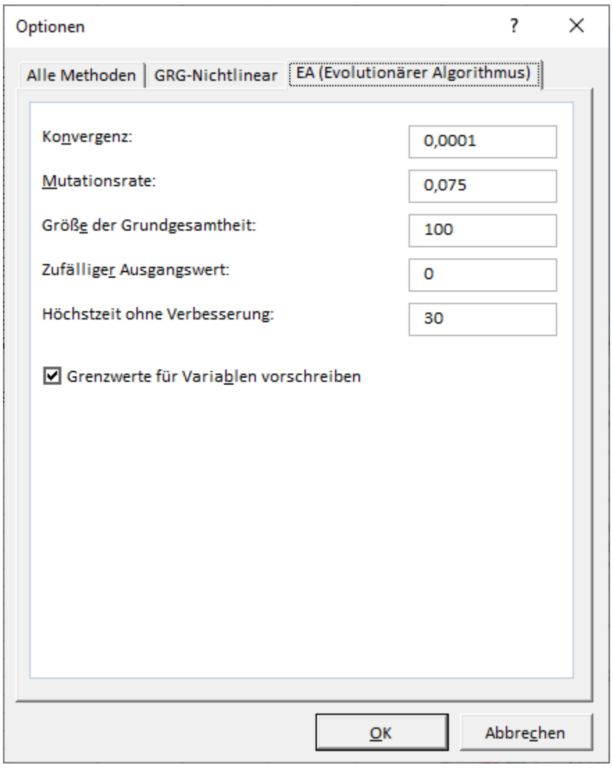
Bedingung	**Erklärung**
	maximale Abweichung zwischen der Restriktion (konstanter Wert) und dem aktuell errechneten Wert (linke Seite) während der Iteration sein darf.
Automatische Skalierung verwenden (Use Automatic Scaling)	Wenn in Ihrem Modell sehr große und sehr kleine Zahlen bei der Zielfunktion und bei den Restriktionen vorkommen (z. B. wegen der Umrechnung von Gramm in Tonnen oder umgekehrt), dann sollten sie die Option Automatische Skalierung verwenden aktivieren. Iterationsergebnisse anzeigen (Show Iteration Results): Die Option Iterationsergebnisse anzeigen unterbricht das Lösungsverfahren bei jeder Iteration und zeigt Ihnen die Zwischenergebnisse an. Im Normalfall sollten Sie diese Option nicht aktivieren, es sei denn, Sie haben einen bestimmten Grund die Zwischenergebnisse jeder Iteration zu kontrollieren.
Ganzzahlige Nebenbedingungen (Ignore Integer Constraints)	Diese Option bezieht sich auf die verschiedenen Restriktionsvarianten der Ganzzahligkeit (int, bin, dif), die Sie bereits auf Seite 289 kennengelernt haben. Im Normalfall sollten Sie hier kein Häkchen setzen. Sollten Sie zu Ihrem Modell keine Lösung erhalten und eine der Ganzzahlrestriktionen wurde verwendet, dann sollten Sie hier zur Lockerung der Restriktionsvorschrift im nächsten Versuch ein Häkchen setzen.
Ganzzahloptimalität(%)(Integer Optimality)	Die Ganzzahloptimalität (%) definiert den Prozentsatz, von dem die beste Lösung mit der Ganzzahlbedingung vom eigentlich optimalen Wert abweichen darf. Diese Option ist nur für die ganzzahligen Nebenbedingungen int, bin und dif relevant. I.d.R beschleunigt eine höhere Toleranz den Lösungsprozess. Die Standardeinstellung ist 1%. Setzt man den Wert auf 0%, stellt man sicher, dass die optimale Lösung gefunden wurde. Dadurch erhöht sich jedoch die Rechenzeit.
Höchstzeit (Sekunden) (Max Time Seconds)	Als größten Wert können Sie maximal 32.767 Sekunden eingeben, was einer Laufzeit von mehr als 9 Stunden gleichkommt. Unabhängig davon kann der Solver mit der [ESC9-Taste gestoppt werden. In diesem Moment werden Sie gefragt ob Sie den Lösungsablauf stoppen oder neustarten wollen.
Iterationen (Iterations)	Hier können Sie die maximale Anzahl der Iterationen (Versuchsläufe) festlegen, die der Solver durchführen darf. Dieses Feld kann man auch freilassen. Bei kleineren Modellen ist i.d.R. ein maximaler Wert von 100 ausreichend.
Max. Teilprobleme (Max Subproblems)	Hier geben Sie die maximale Anzahl von Teilproblemen an, die Sie bei Ganzzahlnebenbedingungen und Anwendung des evolutionären Algorithmus erlauben wollen.
Max. machbare Lösungen (Max. feasible Solutions)	Hier geben Sie die maximale Anzahl der realisierbaren Lösungen ein, die der Solver erzeugen darf.



Für den GRG-Nichtlinear Algorithmus können folgende Parameter festgelegt werden:

Bedingung	**Erklärung**
Konvergenz (Convergence)	Als Standardwert ist 0,0001 eingetragen. Unterschreitet die relative Änderung in der Zielzelle die Zahl 1/10000 = 1*10-4 bei den letzten 5 Iterationen hält der Solver an. Dieser Parameter ist nur für nichtlineare Probleme relevant, d.h. nicht für die Simplex LP Lösungsroutine. Ob die Methode (GRG oder EA) dabei eine Globales Optimum, ein Lokales Optimum oder einfach nur eine gute Lösung gefunden hat, weiß der Solver nicht. Je kleiner der Konvergenzwert, desto länger braucht der Solver zur Lösungsfindung.
Ableitungen Vorwärts/Zentral (Derivatives Forward/Central)	Dieser Parameter legt die Art der Differenzierung (Ableitung) fest, die bei der Schätzung von Differenzteilen der Ziel- und Nebenbedingungsfunktionen verwendet wird. Vorwärts berechnete Annäherungen brauchen weniger Rechenzeit, sind aber nicht so genau wie zentral berechnete Annäherungen, die doppelt so viele Berechnungen erfordern. Letztere Differenzierungsart erweist sich als hilfreich wenn der Solver eine Meldung ausgibt, dass die Lösung nicht verbessert werden konnte. Voreingestellt ist Vorwärts.
Mehrfachstart verwenden (Multistart)	Der GRG-Algorithmus liefert uns nur ein globales Optimum (Minimum oder Maximum) wenn wir damit ein konvexes und glattes Problem lösen. Konvex heißt, dass die Ziel- und Nebenbedingungsfunktionen nur ein Minimum oder Maximum haben. Glatt (smooth) heißt, dass die Funktionsgraphen keinen Knick oder keine Sprungstelle aufweisen. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt liefert das GRG-Verfahren i.d.R. nur ein lokales Optimum. Um ein globales Optimum zu erreichen haben Sie folgende Möglichkeiten: - Sie ändern bei jedem Start die Ausgangswerte der Entscheidungsvariablen. Dabei wählen Sie Werte, die nach

Bedingung	**Erklärung**
	Ihrer Meinung am schnellsten zum gewünschten Ergebnis führen. - Sie aktivieren Mehrfachstart verwenden. Dadurch führt der Solver mehrere automatische Starts durch. Bei jedem Start werden nach dem Zufallsprinzip für die Entscheidungsvariablen neue Startwerte festgelegt. Als Ergebnis präsentiert uns der Solver dann die beste Lösung, die er finden konnte. Um die Chance zu erhöhen ein globales Optimum zu erreichen, sollten Sie zusätzlich die Auswahl Grenzwerte für Variablen vorschreiben aktivieren.
Größe der Grundgesamtheit (Population size)	Diese Zahl kann zwischen 10 und 200 liegen. Der Wert legt die Anzahl der Startpunkte fest, die für die verschiedenen Entscheidungsvariablen bei jedem Start überprüft werden. Anders gesagt beschreibt dieser Wert die Anzahl der Versuchsläufe, die der Solver durchführt, bis er das beste der lokalen Optima gefunden hat. Danach gibt die Lösungsroutine das Ergebnis bekannt.
Zufälliger Ausgangswert (Random seed)	Dieser Parameter legt den Anfangswert für den Zufallsgenerator fest. Wenn Sie mit verschiedenen Werten arbeiten wollen, lassen Sie dieses Feld leer. Wenn Sie den Zufallsgenerator von einem bestimmten Wert aus starten wollen, geben Sie hier den positiven Wert ein.
Grenzwerte für Variable vorschreiben (Require Bounds on Variables)	Die Multistart-Methode ist dann effizient, wenn die Nebenbedingungen für die Entscheidungsvariablen untere und obere Grenzen vorweisen. Je enger diese Grenzen sind, desto größer ist die Chance ein lokales Optimum zu finden. Mit einem Häkchen legen Sie fest, dass Multistarts nur dann durchgeführt werden, wenn für die Entscheidungsvariablen bei den Nebenbedingungen untere und obere Grenzen festgelegt sind.



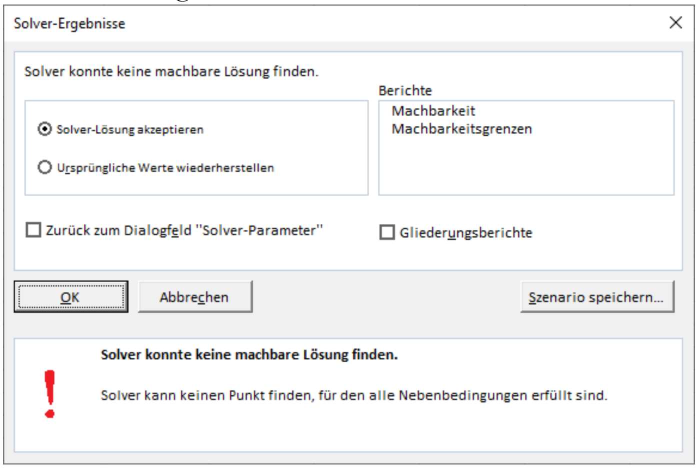
Für den EA-Algorithmus können folgende Parameter festgelegt werden

Bedingung	**Erklärung**
Konvergenz (Convergence)	Vorbesetzt ist dieses Feld mit 0,0001. Je kleiner dieser Wert desto mehr Versuchsläufe muss der Solver durchführen und desto näher kommt das Solver-Ergebnis an die optimale Lösung.
Mutationsrate (Mutation Rate)	Geben Sie hier einen Wert zwischen 0 und 1 ein. Dieser Wert beschreibt für jede Generation die relative Frequenz, mit der einige Mitglieder einer Population mutieren, um eine neue Versuchslösung zu erzeugen. Eine höhere Mutationsrate erhöht die Vielfalt der Population und die Chance eine bessere Lösung zu finden. Dies führt jedoch auch zu einer höheren Rechenzeit.
Größe der Grundgesamtheit (Population size)	Es sind hier Werte zwischen 10 und 200 einzugeben. Geben Sie hier keinen Wert oder einen Wert kleiner als 10, so gilt der Wert 10. Dieser Wert gibt die Anzahl der Startpunkte an, die beim Evolutionären Algorithmus überprüft werden sollen.
Zufälliger Ausgangswert (Random Seed)	Dieser Parameter legt den Anfangswert für den Zufallsgenerator fest. Wenn Sie mit verschiedenen Werten arbeiten wollen, lassen Sie dieses Feld leer. Wenn Sie den Zufallsgenerator von einem bestimmten Wert aus starten wollen, geben Sie hier den positiven Wert ein. Höchstzeit ohne Verbesserung (Maximum Time without improvement): Hier ist ein Wert in Sekunden einzugeben, der bestimmt, wie lange der Solver maximal arbeiten soll, wenn keine bedeutsame Verbesserung der Lösung eintritt. Hat der Solver z. B. die Höchstzeit von 30 Sekunden überschritten, stoppt er den Lösungslauf und meldet: Solver kann die aktuelle Lösung nicht mehr verbessern.

Bedingung	**Erklärung**
Grenzwerte für Variablen vorschreiben (Require Bounds on Variables)	Die Multistart-Methode ist dann effizient, wenn die Nebenbedingungen für die Entscheidungsvariablen untere und obere Grenzen vorweisen. Je enger diese Grenzen sind, desto größer ist die Chance ein lokales Optimum zu finden. Mit einem Häkchen legen Sie fest, dass Multistarts nur dann durchgeführt werden, wenn für die Entscheidungsvariablen bei den Nebenbedingungen untere und obere Grenzen festgelegt sind.

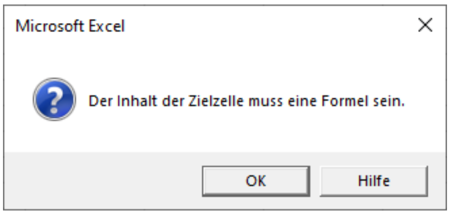
3.3. Meldungen des Solvers

Fehlermeldungen während der Ergebnissuche Nachfolgend benennen wir einige typische Fehlermeldungen, die beim Lösen eines Models auftreten können:



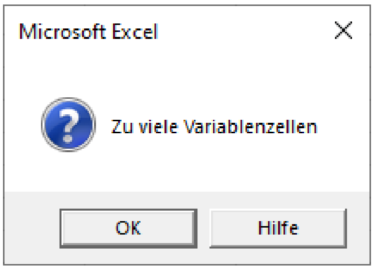
Solver kann keinen Punkt finden, für den alle Nebenbedingungen erfüllt sind.

Wenn der Solver mit den Nebenbedingungen nicht klarkommt, das Zeitlimit oder die Iterationszahl überschritten hat, erscheint die Meldung Solver konnte keine machbare Lösung finden. Der Grund dafür ist z. B., dass ein Lösungsmodell formuliert wurde, das keinen Lösungsraum für die Zielfunktion zur Verfügung stellt. D.h. es gibt zum aufgestellten Modell überhaupt keine Lösung.



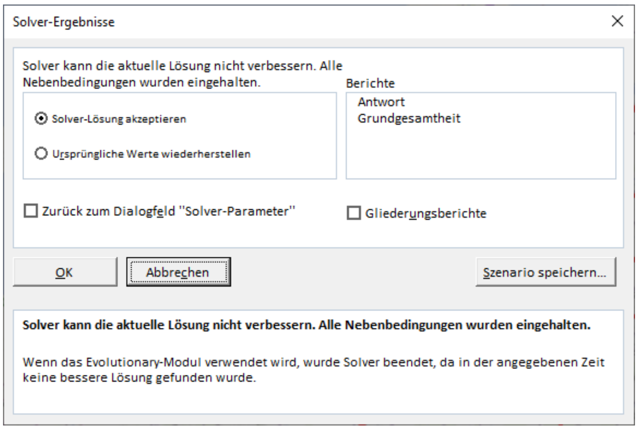
Der Inhalt der Zielzelle muss eine Formel sein.

Diese Fehlermeldung erscheint wenn die Zielzelle und die Zielfunktion im Arbeitsblatt nicht mit einer Formel verbunden sind, oder im Dialogfenster Solver Parameter bei Zielwert ein falscher Zellbezug vereinbart wurde.

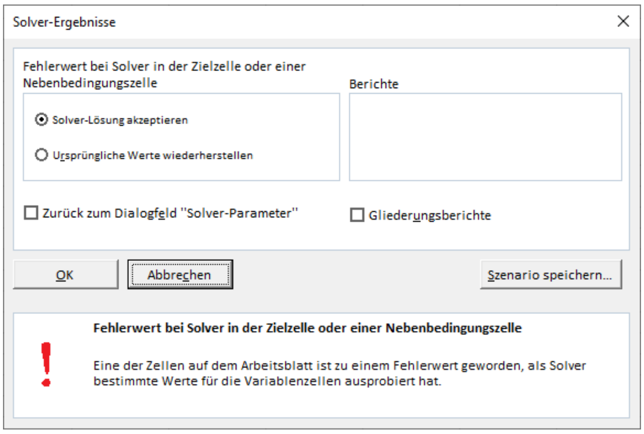


Zu viele Variablenzellen.

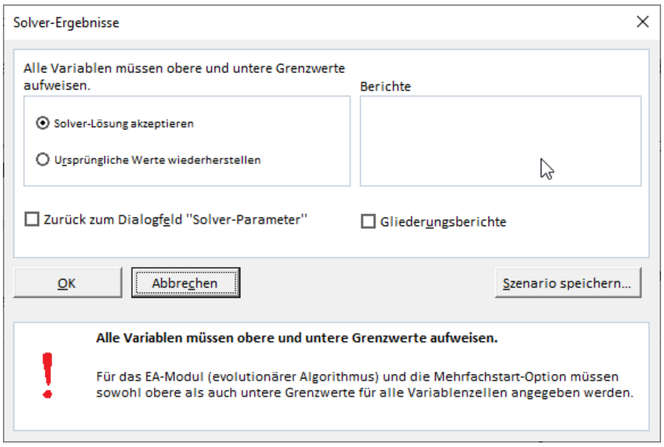
Die Fehlermeldung wird angezeigt, wenn zu viele Entscheidungsvariablen aufgenommen wurden. Solver kann max. 200 Entscheidungsvariable mit der Simplex LP-Methode verarbeiten. Beim GRG- und EA-Algorithmus reduziert sich diese Zahl auf 100. In solchen Fällen sollten Sie andere Solver-Tools einsetzen. Meldungen wenn der Solver keine (neue) Lösung findet



Wenn Sie versuchen ein globales Optimum, dass man zum Beispiel mit der Simplex- LP-Lösungsmethode erhält, zu verbessern, dann erhalten Sie die Meldung. Beachten Sie auch hier die Angabe unten in der Dialogbox, dass in der angegebenen Zeit keine bessere Lösung gefunden werden konnte. Wenn man das EA-Modul zur Lösung einsetzt, hat man keine Garantie, dass man ein lokales oder globales Optimum gefunden hat.



Bei der nächsten Meldung haben Sie die Zielzelle mit der Entscheidungsvariablen oder Nebenbedingungen so verbunden, dass z. B. in der Zielzelle die Fehlermeldungen #ZAHL! oder #WERT! erscheinen.



Die Fehlermeldung Alle Variablen müssen obere und untere Grenzwerte aufweisen erscheint beim Einsatz der EA-Lösungsmethode oder wenn man die Multistart-Option aktiviert hat.

Die Fehlermeldung „die erforderlichen Linearitätsbedingungen sind nicht erfüllt“, weist darauf hin, das in den Nebenbedingungen und/oder bei der Zielfunktion nichtlineare Gleichungen formuliert sind. Die Lösungsmethode ist von Simplex LP auf GRG zu ändern. Wenn für die Zielfunktion ein Lösungsraum vorhanden ist, dann bringt der Solver die obige Meldung. Beachten Sie insbesondere die Hinweise ganz unten im Dialogfenster.

Bei Verwendung der Simplex-LP-Lösungsmethode hat der Solver eine global optimale Lösung gefunden. D.h. aber nicht, dass es nur ein Optimum geben muss. Es kann auch mehrere (siehe Bespiele zur Verschnitt-Optimierung), in Grenzfällen unendlich viele optimale Lösungen geben. Der Solver gibt dann ein optimales Ergebnis zurück, dessen Entstehung nur die Programmierer kennen. Wenn das GRG-Lösungsmodul verwendet wird, haben Sie mindestens ein lokales Optimum gefunden, aber nicht zwangsläufig auch ein Globales. In anderen Worten, Sie haben die Zugspitze gefunden, aber nicht den Mount Everest.

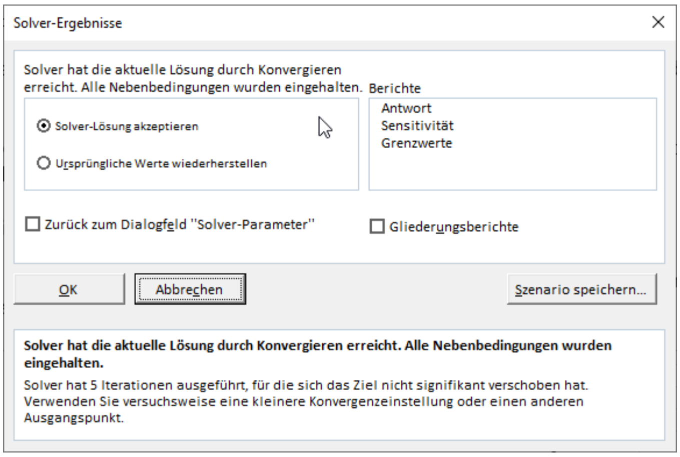
Bei der Meldung, dass der Solver ein Ergebnis durch Konvergieren gefunden hat, sollten Sie zunächst versuchen diese Lösung zu verbessern, indem Sie sukzessive den Konvergenzwert in der Optionsbox verkleinern.

Bei der EA-Meldung, dass der Solver eine machbare Lösung gefunden hat (feasible solution), muss man davon ausgehen, dass es nur eine gute Lösung ist, bei der alle Nebenbedingungen eingehalten wurden. Sie können dann versuchen diese Lösung zu verbessern, indem Sie

- den EA-Algorithmus neu starten mit dem Ausgangswert der guten Lösung
- die Größen der Mutationsrate und/oder Grundgesamtheit erhöhen (Abb. 7.2 - 3)
- die Zahl der maximalen Teilprobleme oder die maximale Zahl der machbaren Lösungen erhöhen

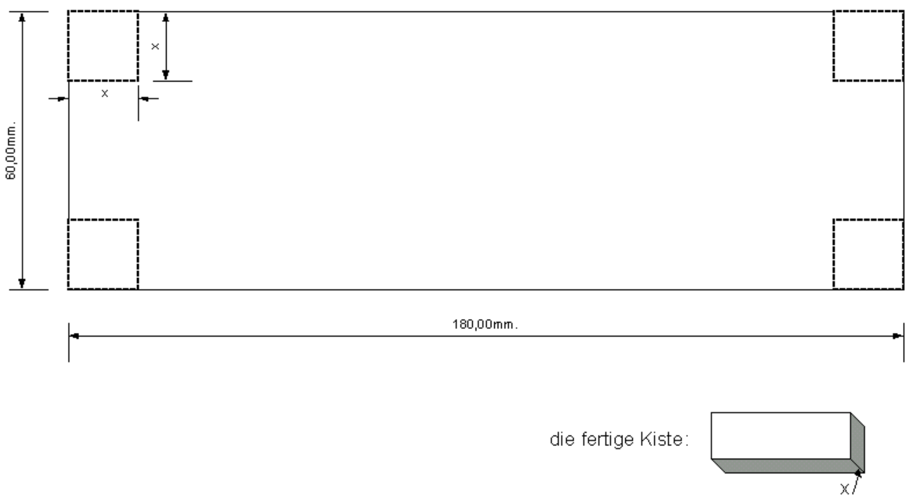
Gegebenenfalls das Problem mit dem GRG-Algorithmus lösen. Analog zur Suche nach dem Minimum könnte das Maximum ermittelt werden. Damit der Solver nicht eine riesige (negative) Zahl ermittelt, sollten Sie jedoch eine (oder mehrere) Bedingungen festlegen.

Umgekehrt: so sollte das Ergebnis aussehen:



3.4. Beispiel I zum Solver (Max)

Aus einem rechteckigen Blech mit Seitenlänge a = 180 cm und b = 60 cm ist ein Kasten ohne Deckel herzustellen, indem von jeder Ecke vier Quadrate herausgeschnitten werden.



Ein rechteckiges Blech

Welche Höhe x muss der Kasten haben, damit er ein möglichst großes Volumen V enthält. Das Volumen V berechnet sich als Grundfläche × Höhe oder

$$V = x \times (180 - 2 \times x) \times (60 - 2 \times x)$$

Die Werte für x liegen zwischen 0 und 30. Die mathematische Lösung über Differenzierung ergibt die beiden Werte

$$x_{1,2} = 40 \pm 10 \times \sqrt{7}$$

also $x_1 \approx 66{,}5$ und $x_2 \approx 13{,}5$. Aus $x < 30$ folgt, dass

$$x = 40 - 10 \times \sqrt{7}$$

Mit Excel kann dies überprüft werden. Begonnen wird mit einem beliebigen Wert, beispielsweise mit 20, der in eine beliebige Zelle geschrieben wird. Über die Funktion

```
=B3*(180-2*B3)*(60-2*B3)
```

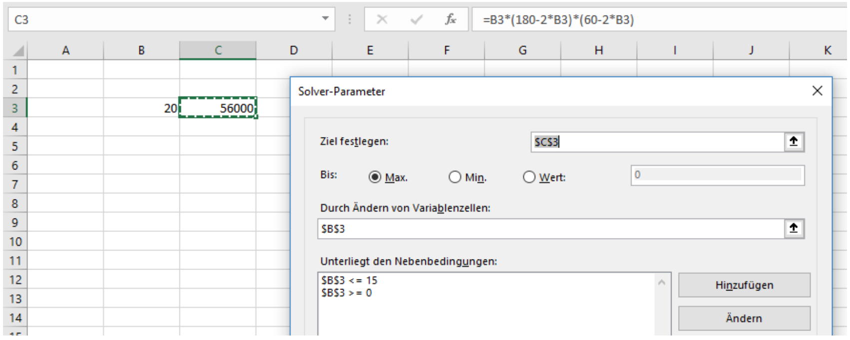
wird das Volumen berechnet. In diesem Fall (x=20) berechnet Excel die Zahl 56.000.

Nun wird über das Register Add-Ins der Solver aufgerufen, das (gesuchte) Maximum eingestellt, und die Randbedingungen werden festgelegt:

```
B3<=30
B3>=0
```

Die Schaltfläche „Lösen“ berechnet nun das Maximum. Der Solver ermittelt den Wert 13,5424866891966. Der korrekte Wert lautet: 13,5424868893541.

Zur Kontrolle sind Zielwertsuche und Solver leistungsfähige Hilfsmittel: Beide lassen sich mit wenig Aufwand effektiv einsetzen.



Der Solver

3.5. Beispiel II zum Solver (Min)

Angenommen, es soll eine Fahrt mit einem Auto unternommen werden, die eine Strecke von 600 km umfasst. Als Fahrer wird ein Student gewonnen, der pro Stunde 15 Euro erhält Der Benzinverbrauch (gemessen in Liter/100 km) von Kraftfahrzeugen ist abhängig von der Geschwindigkeit

$N = k_1 \times \exp(k_2 v)$

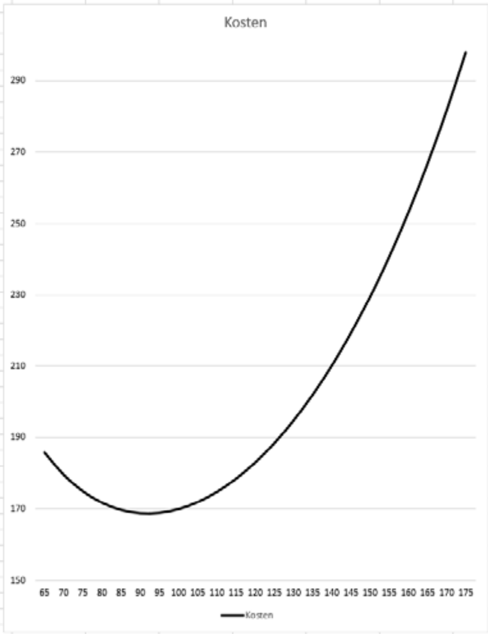
Wobei k_1 und k_2 Konstanten sind, die vom Typ des Autos abhängen. Im vorliegenden Fall wird k_1 mit 1,7 l/100 km und k_2 mit 0,015 h/km angesetzt.

Die Kosten für den Fahrer berechnen sind: Arbeitsentgelt = $t \times p_h$. Die Zeit t ergibt sich $t = s / v$. Gleichzeitig steigt mit zunehmender Geschwindigkeit der Benzinverbrauch:

Benzinkosten = $N \times p_B \times s / 100$

Dem Solver wird die Aufgabe gestellt zu ermitteln bei welcher Durchschnittsgeschwindigkeit die Kosten für die Fahrt am geringsten sind.

	A	B	C	D	E	F
1	Fahrtkosten-Simulation					
3	Strecke	s	600			
4	Stundenlohn	p_h	15			
5	Benzinpreis	p_B	1,75			
7	Parameter	k1	1,7			
8	Parameter	K2	0,015			
11			Geschwindig	Verbrauch	Fahrtdauer	Kosten
12			100	7,61887142	6	169,99815
13				=$C$7*EXP($C$8*C12)	=$C$3/C12	=D12*$C$5*$C$3/100+E12*$C$4
20			Geschwindig	Verbrauch	Fahrtdauer	Kosten
21			65	4,506984259	9,230769231	185,784873
22			70	4,858006901	8,571428571	179,580501
23			75	5,236368643	8	174,981871
24			80	5,644198769	7,5	171,764087
25			85	6,083792397	7,058823529	169,762173
26			90	6,557623402	6,666666667	168,855046
27			95	7,068358333	6,315789474	168,954605
28			100	7,61887142	6	169,99815
29			105	8,212260751	5,714285714	171,943024
30			110	8,851865706	5,454545455	174,762772
31			115	9,54128575	5,217391304	178,44437
32			120	10,28440069	5	182,986207
33			125	11,0853925	4,8	188,396621
34			130	11,94876889	4,615384615	194,692843
35			135	12,87938861	4,444444444	201,900247
36			140	13,88248885	4,285714286	210,051847
37			145	14,96371471	4,137931034	219,18797
38			150	16,12915092	4	229,356085
39			155	17,38535615	3,870967742	240,610756
40			160	18,73939985	3,75	253,013698
41			165	20,19890209	3,636363636	266,633927
42			170	21,77207643	3,529411765	281,547979
43			175	23,46777612	3,428571429	297,840221

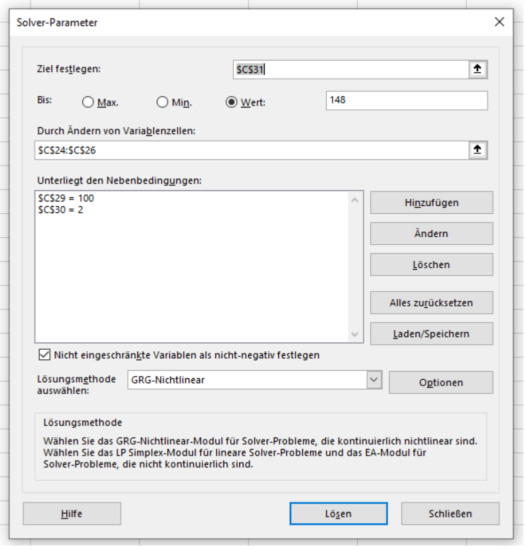


3.6. Beispiel III: mehrere gesuchte Zellen

Frau Häberle ist sparsam veranlagt. Am Bahnhof wiegt sie sich zusammen mit ihrem Hund und ihrem Baby. Sie weiß, dass sie 100 Kilogramm mehr wiegt als der Hund und das Baby zusammen und dass das Baby doppelt so schwer ist wie der Hund. Die Waage zeigt 148 Kilogramm an. Was wiegt Frau Häberle?

C31 =SUMME(C24:C26)

	A	B	C	D
24	Gewicht Häberle		150	
25	Gewicht Hund		10	
26	Gewicht Baby		8	
28	Bedingungen			
29	Diff		132	=C24-C25-C26
30	Doppeltes Gewicht:		0,8	=C26/C25
31	Gesamt		168	=SUMME(C24:C26)



Analog:

Briefmarken: Eine Dame gibt dem Postbeamten am Schalter eine 500-Euro-Note für Briefmarken und sagt: „Geben Sie mir ein paar Marken zu 60 Cent, zwölf Mal so viele zu 80 Cent, 24 Mal so viele zu 95 Cent und für den Rest in 1,55-Euro-Briefmarken." Was tut der Beamte, um ihr diesen Wunsch zu erfüllen?

Oder auch:

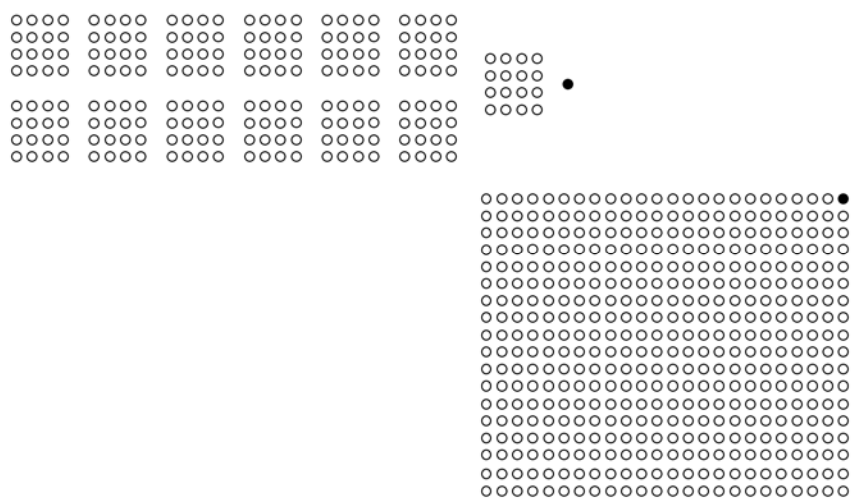
„Diese beiden Melonen wiegen zusammen 20 Pfund“, sagt der Verkäufer im Naturkostladen. „Die größere kostet pro Pfund 20 Cents mehr als die kleine.“ Frau Allnatura kaufte die kleinere für insgesamt 2 Euro, und Herr Demeter zahlte für die große 11,20 Euro. Wie viel haben die beiden Melonen gewogen?

Ebenso:

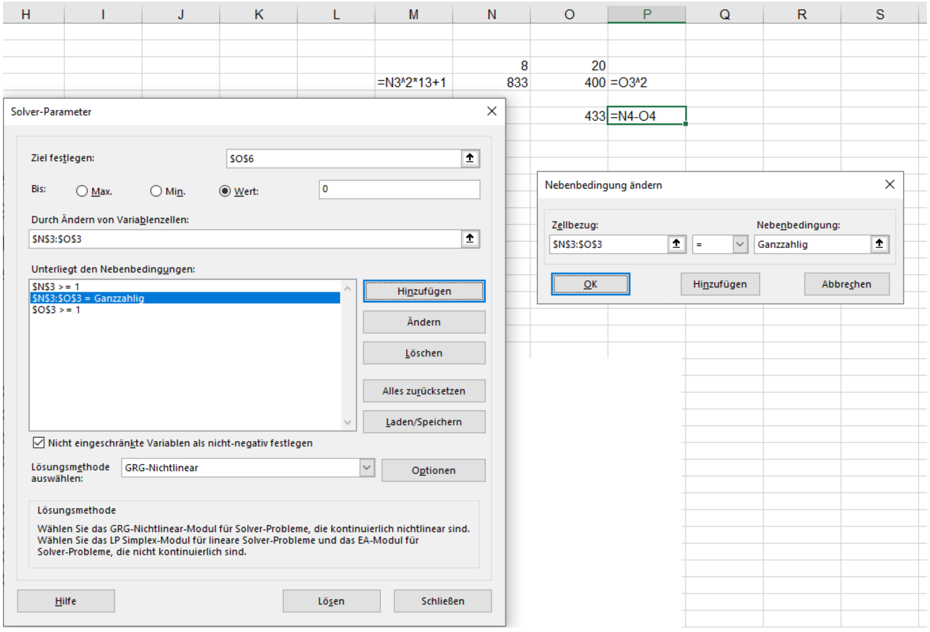
Auf dem Hinweg zum großen Picknick befinden sich in jedem Wagen genau die gleiche Anzahl Personen. Auf halbem Weg gehen zehn Wagen zu Bruch, so dass alle übrigen je eine Person zusätzlich aufnehmen müssen. Als es Zeit ist, den Heimweg anzutreten, stellt sich heraus, dass von den restlichen Wagen weitere 15 ausfallen, so dass bei der Rückfahrt in jedem Wagen drei Personen mehr waren als bei der Abfahrt am Morgen.
Wie viele Personen nehmen an dem alljährlichen Picknick teil?

3.7. Beispiel IV: ganzzahlige Lösung

Erneut, in ferner Zukunft, kämpfen die Jedi-Ritter unter ihrem Chef Darth Vader. Sie formieren sich in 13 Quadraten mit der gleichen Anzahl Kämpfer. Mit ihrem Anführer zusammen hätten sie auch ein großes Quadrat bilden können. Wie viele Krieger umfasst die Armee der Jedi-Ritter?



Die Lösung kann mit der Bedingung Zelle ist ganzzahlig durchgeführt werden.



Analog:

Wie alt ist die Tochter?

Ein Hausierer läutet in einem Wohnhaus im obersten Stock an einer Türe. Eine Dame öffnet und teilt ihm mit, dass sie nichts kaufen möchte. Doch er bittet sie inständig darum, worauf sie weich wird. „Gut“, sagt sie, „ich kaufe Ihnen etwas ab, wenn Sie mir sagen können, wie alt meine drei Töchter sind. Das Produkt ihrer Alter ist 36 und die Summe gleich meiner Hausnummer.“

Der Hausierer überlegt und antwortet: „Sie haben mir eine Information unterschlagen!“ „Stimmt“, meint sie, „meine älteste Tochter spielt Klavier.“ Nun weiß der Hausierer die Lösung. Wie alt sind die Töchter?

3.8. Beispiel V: Simplex

Gegeben seien vier lineare Gleichungen:

```
(I)       2×a + 3×b + c - 4×d = 9

(II)      a - b + 5×c + 2×d = 0

(III)     4×a + 3×b - c + 3×d = 25

(IV)      3×a -3×b + 2×c + 9×d = 6
```

In den Zellen B1, B2, B3 und B4 stehen vier beliebige Werte, beispielsweise 1, 1, 1 und 1. Dann ergeben die vier Gleichungen:

```
=2*B1+3*B2+B3-4*B4
=B1-B2+5*B3+2*B4
=4*B1+3*B2-B3+3*B4
=3*B1-3*B2+2*B3+9*B4
```

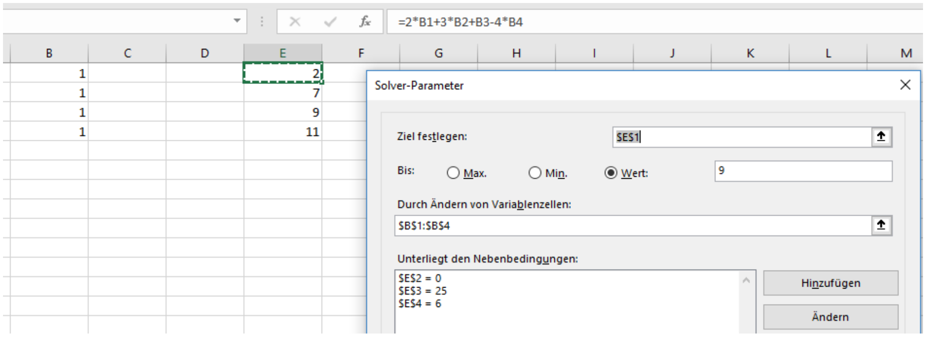
die vier Werte 2, 7, 9 und 11. Zwar kann der Solver nur eine Bedingung suchen, also beispielsweise die Zelle E1 (in der sich die Formel =2*B1+3*B2+B3-4*B4 befindet) berechnen, jedoch können die übrigen Zeilen als Nebenbedingungen festgelegt werden.

Die drei Randbedingen werden festgelegt:

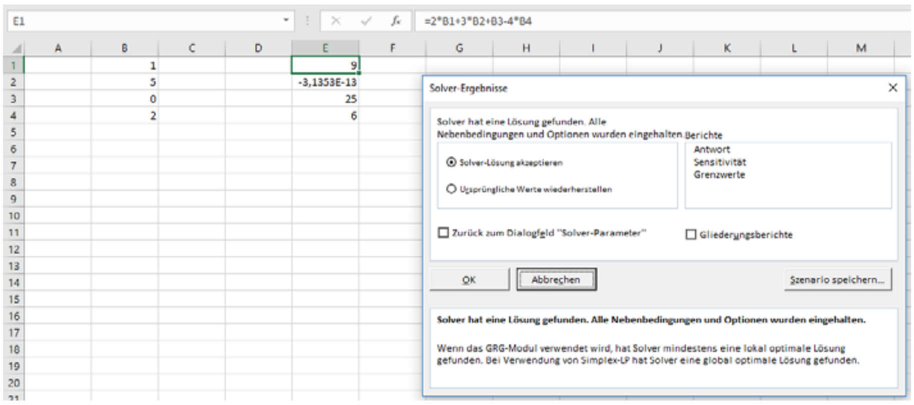
```
E2 = 0
E3 = 25
E4 = 6
```

Selbstverständlich könnte man die Berechnungsreihenfolge umkehren. Und schnell ist die Lösung {1; 5; 0; 2} gefunden.

Übrigens könnte man sich so eine Matrix erstellen, in welcher die n × n Parameter des Gleichungssystems mit n Zeilen stehen. Man beginnt wieder mit beliebigen Werten und berechnet die die Differenz zu den gesuchten Werten. Sie müssen 0 sein, was mit Hilfe des Solvers leicht einzugeben ist.



Die Rahmenbedingungen



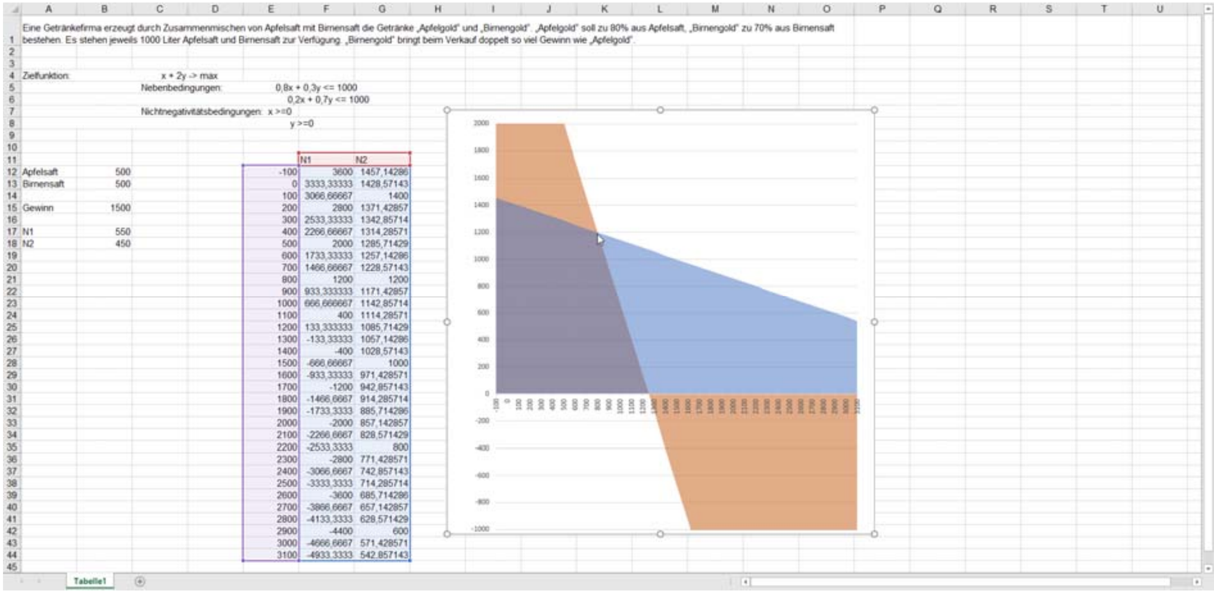
Das Ergebnis der linearen Gleichungen

Lineare Gleichungen, die mit dem Simplex-Verfahren gelöst werden, können immer graphisch dargestellt werden:

Eine Getränkefirma erzeugt durch Zusammenmischen von Apfelsaft mit Birnensaft die Getränke „Apfelgold“ und „Birnengold“. „Apfelgold“ soll zu 80% aus Apfelsaft, „Birnengold“ zu 70% aus Birnensaft bestehen. Es stehen jeweils 1000 Liter Apfelsaft und Birnensaft zur Verfügung. „Birnengold“ bringt beim Verkauf doppelt so viel Gewinn wie „Apfelgold“.

Zielfunktion:	x + 2y -> max
Nebenbedingungen:	0,8x + 0,3y <= 1000
	0,2x + 0,7y <= 1000
Nichtnegativitätsbedingungen:	x >=0

y >=0



Dieses Ergebnis liefert auch der Solver.

3.9. Beispiel VI: Problem des Handlungsreisenden

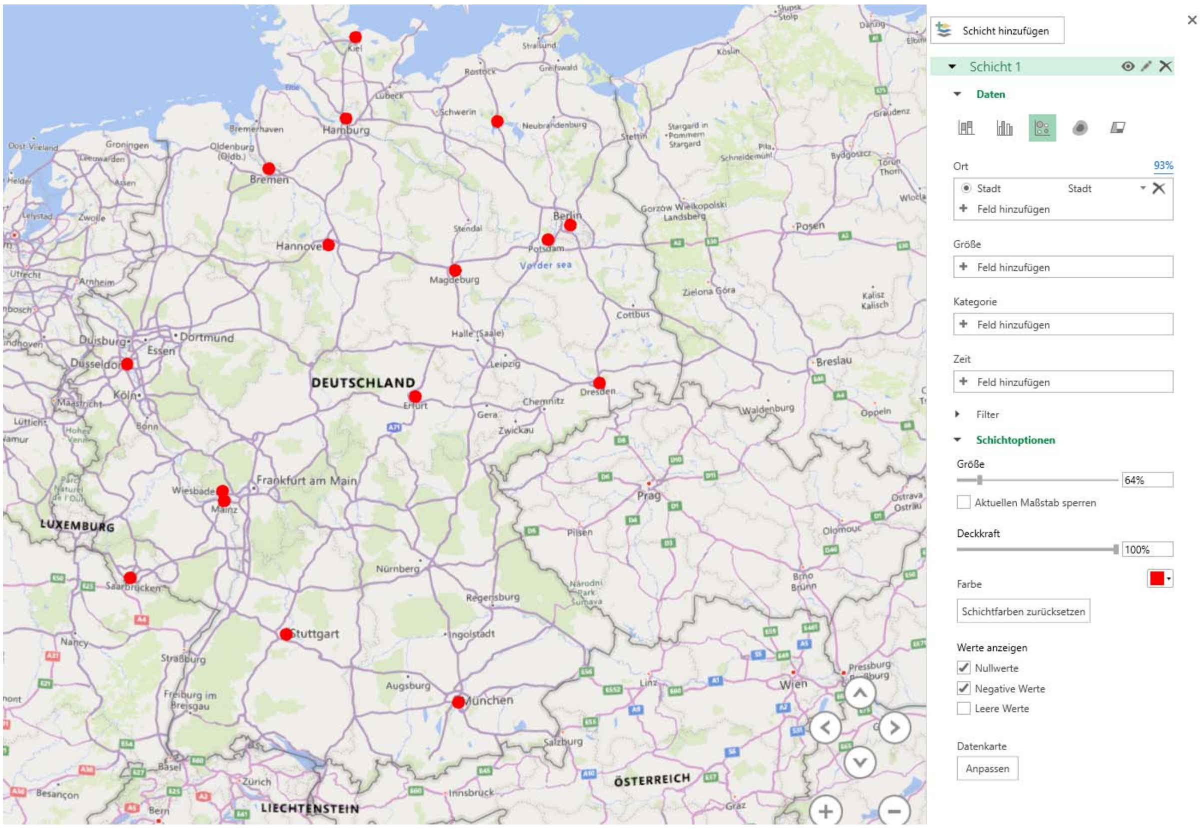
Das Problem des Handlungsreisenden (auch Botenproblem, Rundreiseproblem, engl. Traveling Salesman Problem oder Traveling Salesperson Problem (TSP)) ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem des Operations Research und der theoretischen Informatik. Die Aufgabe besteht darin, eine Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte so zu wählen, dass keine Station außer der ersten mehr als einmal besucht wird, die gesamte Reisestrecke des Handlungsreisenden möglichst kurz und die erste Station gleich der letzten Station ist.

Seit seiner ersten Erwähnung als mathematisches Problem im Jahre 1930 haben sich viele Forscher damit befasst und neue Optimierungsverfahren daran entwickelt und erprobt, die momentan auch für andere Optimierungsprobleme eingesetzt werden. Heute steht eine Vielzahl von heuristischen und exakten Methoden zur Verfügung, mit denen auch schwierige Fälle mit mehreren tausend Städten optimal gelöst wurden.

Das Problem des Handlungsreisenden tritt schon in seiner Reinform in vielen praktischen Anwendungen auf, beispielsweise in der Tourenplanung, in der Logistik oder im Design von Mikrochips. Noch häufiger tritt es allerdings als Unterproblem auf, wie zum Beispiel bei der Verteilung von Waren, bei der Planung von Touren eines Kunden- oder Pannendienstes oder bei der Genom-Sequenzierung. Dabei sind die Begriffe „Stadt" und „Entfernung" nicht wörtlich zu nehmen, vielmehr repräsentieren die Städte beispielsweise zu besuchende Kunden, Bohrlöcher oder DNA-Teilstränge, während Entfernung für Reisezeit, Kosten oder den Grad der Übereinstimmung zweier DNA-Stränge steht. In vielen praktischen Anwendungen müssen zudem Zusatzbedingungen wie Zeitfenster oder eingeschränkte Ressourcen beachtet werden, was die Lösung des Problems erheblich erschwert.

Das Problem des Handlungsreisenden ist ein NP-schweres Problem. Unter der bislang unbewiesenen Annahme, dass die Komplexitätsklassen P und NP verschieden sind, gilt demnach, dass kein Algorithmus existiert, der eine kürzeste Rundreise in polynomieller Worst-case-Laufzeit bestimmt. (Quelle: wikipedia)

Gesucht: Welches ist die kürzeste Strecke, welche die deutschen Landeshauptstädte verbindet?



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Berlin	Bremen	Dresden	Düsseldorf	Erfurt	Hamburg	Hannover	Kiel	Magdeburg	Mainz	München	Potsdam	Saarbrücker	Schwerin	Stuttgart	Wiesbaden
2	Berlin	0	375	214	478	288	279	258	343	131	456	596	27	745	200	631	450
3	Bremen	375	0	478	248	351	110	118	205	251	346	766	298	590	228	645	338
4	Dresden	214	478	0	487	220	492	385	573	228	406	496	156	668	421	531	404
5	Düsseldorf	478	248	487	0	299	339	240	412	350	172	488	453	222	413	323	166
6	Erfurt	288	351	220	299	0	376	289	459	209	226	425	211	453	480	435	222
7	Hamburg	279	110	492	339	376	0	154	85	271	414	772	243	690	120	668	407
8	Hannover	258	118	385	240	289	154	0	238	136	285	647	227	553	269	526	278
9	Kiel	343	205	573	412	459	85	238	0	369	499	882	291	778	139	762	491
10	Magdeburg	131	251	228	350	209	271	136	369	0	336	522	103	611	311	573	330
11	Mainz	456	346	406	172	226	414	285	499	336	0	319	430	123	460	152	8
12	München	596	766	496	488	425	772	647	882	522	319	0	486	413	773	210	324
13	Potsdam	27	298	156	453	211	243	227	291	103	430	486	0	553	177	488	425
14	Saarbrücken	745	590	668	222	453	690	553	778	611	123	413	553	0	822	210	128
15	Schwerin	200	228	421	413	480	120	269	139	311	460	773	177	822	0	789	453
16	Stuttgart	631	645	531	323	435	668	526	762	573	152	210	488	210	789	0	159
17	Wiesbaden	450	338	404	166	222	407	278	491	330	8	324	425	128	453	159	0

Man erstellt eine Liste der Städte mit Nummer 1 bis 16:

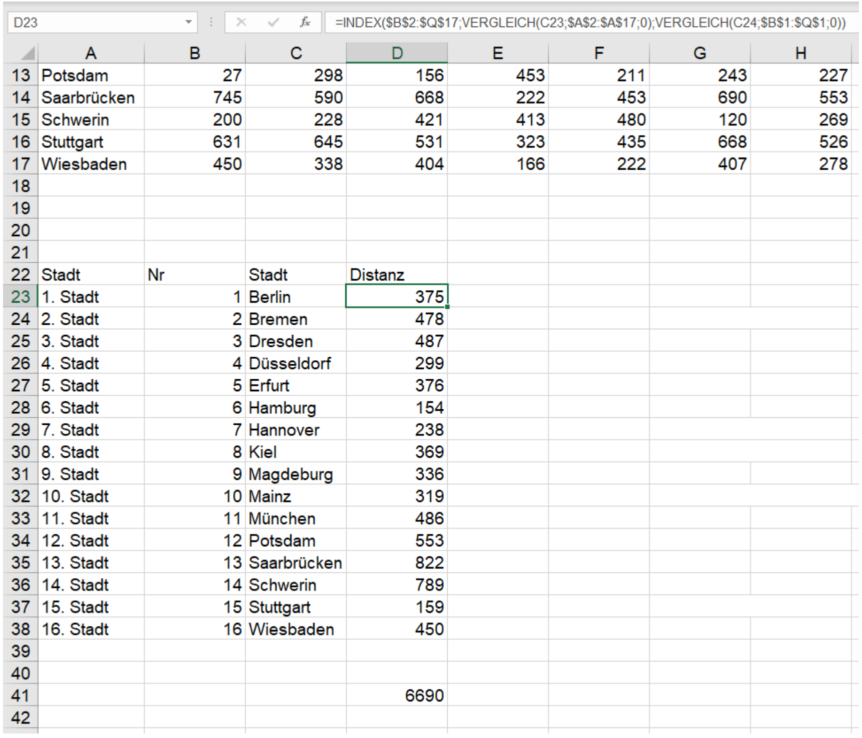
=INDEX($A$2:$A$17;B23)

C23 =INDEX($A$2:$A$17;B23)

	A	B	C	D	E
13	Potsdam	27	298	156	45
14	Saarbrücken	745	590	668	22
15	Schwerin	200	228	421	41
16	Stuttgart	631	645	531	32
17	Wiesbaden	450	338	404	16
18					
19					
20					
21					
22	Stadt	Nr	Stadt		
23	1. Stadt	1	Berlin		
24	2. Stadt	2	Bremen		
25	3. Stadt	3	Dresden		
26	4. Stadt	4	Düsseldorf		
27	5. Stadt	5	Erfurt		
28	6. Stadt	6	Hamburg		

Und berechnet die Distanzen aus der obigen Tabelle:

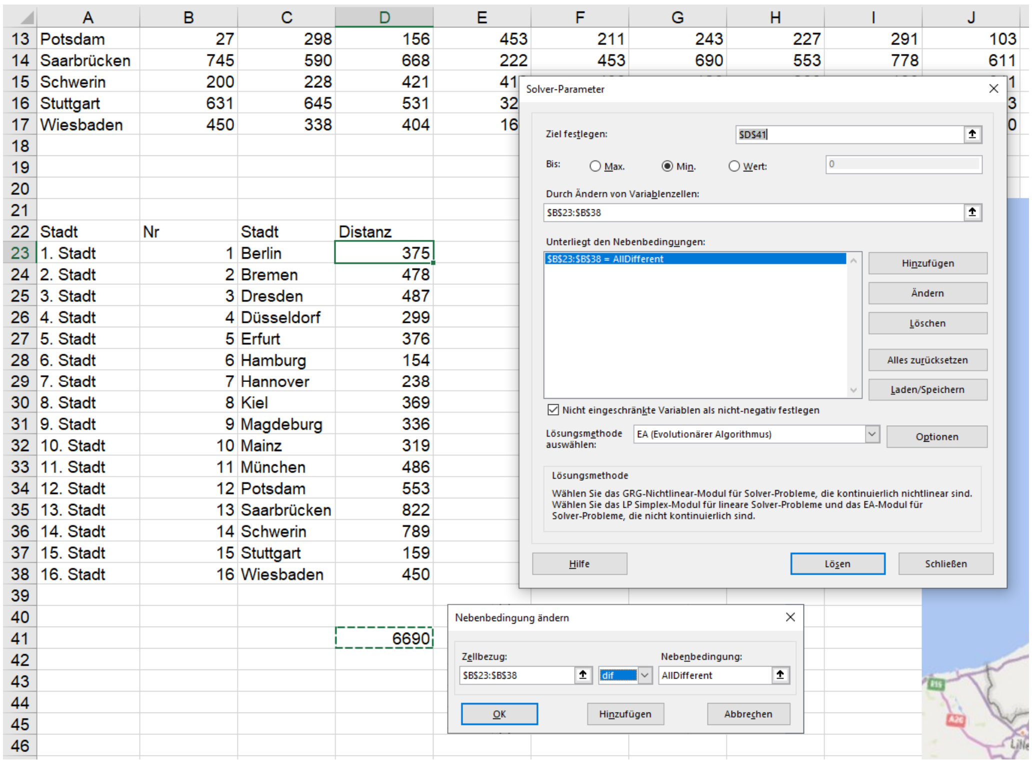
=INDEX($B$2:$Q$17;VERGLEICH(C23;$A$2:$A$17;0);VERGLEICH(C24;$B$1:$Q$1;0))



D23 =INDEX($B$2:$Q$17;VERGLEICH(C23;$A$2:$A$17;0);VERGLEICH(C24;$B$1:$Q$1;0))

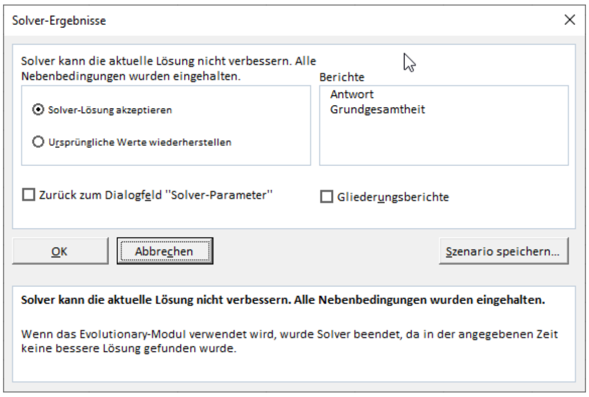
	A	B	C	D	E	F	G	H
13	Potsdam	27	298	156	453	211	243	227
14	Saarbrücken	745	590	668	222	453	690	553
15	Schwerin	200	228	421	413	480	120	269
16	Stuttgart	631	645	531	323	435	668	526
17	Wiesbaden	450	338	404	166	222	407	278
18								
19								
20								
21								
22	Stadt	Nr	Stadt	Distanz				
23	1. Stadt	1	Berlin	375				
24	2. Stadt	2	Bremen	478				
25	3. Stadt	3	Dresden	487				
26	4. Stadt	4	Düsseldorf	299				
27	5. Stadt	5	Erfurt	376				
28	6. Stadt	6	Hamburg	154				
29	7. Stadt	7	Hannover	238				
30	8. Stadt	8	Kiel	369				
31	9. Stadt	9	Magdeburg	336				
32	10. Stadt	10	Mainz	319				
33	11. Stadt	11	München	486				
34	12. Stadt	12	Potsdam	553				
35	13. Stadt	13	Saarbrücken	822				
36	14. Stadt	14	Schwerin	789				
37	15. Stadt	15	Stuttgart	159				
38	16. Stadt	16	Wiesbaden	450				
39								
40								
41				6690				
42								

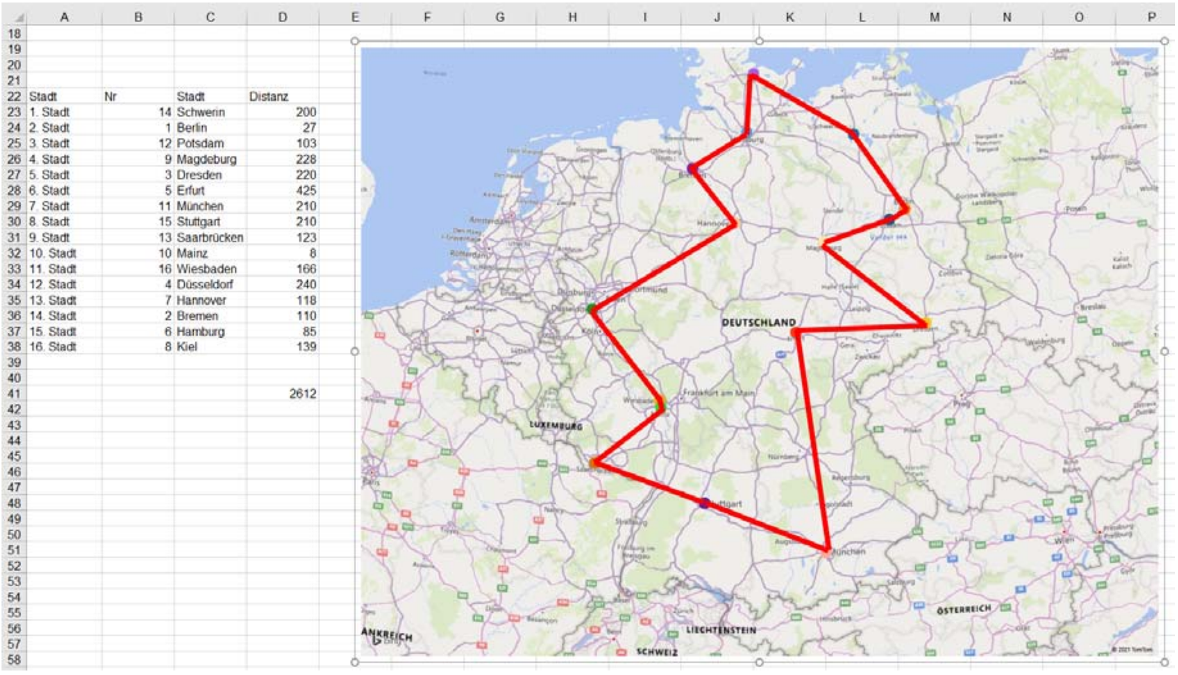
Und summiert die Distanzen.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
13	Potsdam	27	298	156	453	211	243	227	291	103
14	Saarbrücken	745	590	668	222	453	690	553	778	611
15	Schwerin	200	228	421	41					1
16	Stuttgart	631	645	531	32					3
17	Wiesbaden	450	338	404	16					0
18										
19										
20										
21										
22	Stadt	Nr	Stadt	Distanz						
23	1. Stadt	1	Berlin	375						
24	2. Stadt	2	Bremen	478						
25	3. Stadt	3	Dresden	487						
26	4. Stadt	4	Düsseldorf	299						
27	5. Stadt	5	Erfurt	376						
28	6. Stadt	6	Hamburg	154						
29	7. Stadt	7	Hannover	238						
30	8. Stadt	8	Kiel	369						
31	9. Stadt	9	Magdeburg	336						
32	10. Stadt	10	Mainz	319						
33	11. Stadt	11	München	486						
34	12. Stadt	12	Potsdam	553						
35	13. Stadt	13	Saarbrücken	822						
36	14. Stadt	14	Schwerin	789						
37	15. Stadt	15	Stuttgart	159						
38	16. Stadt	16	Wiesbaden	450						
39										
40										
41				6690						
42										
43										
44										
45										
46										

Der Solver findet mit der Methode EA und der Bedingung dif (AllDifferent) die kürzeste Route:

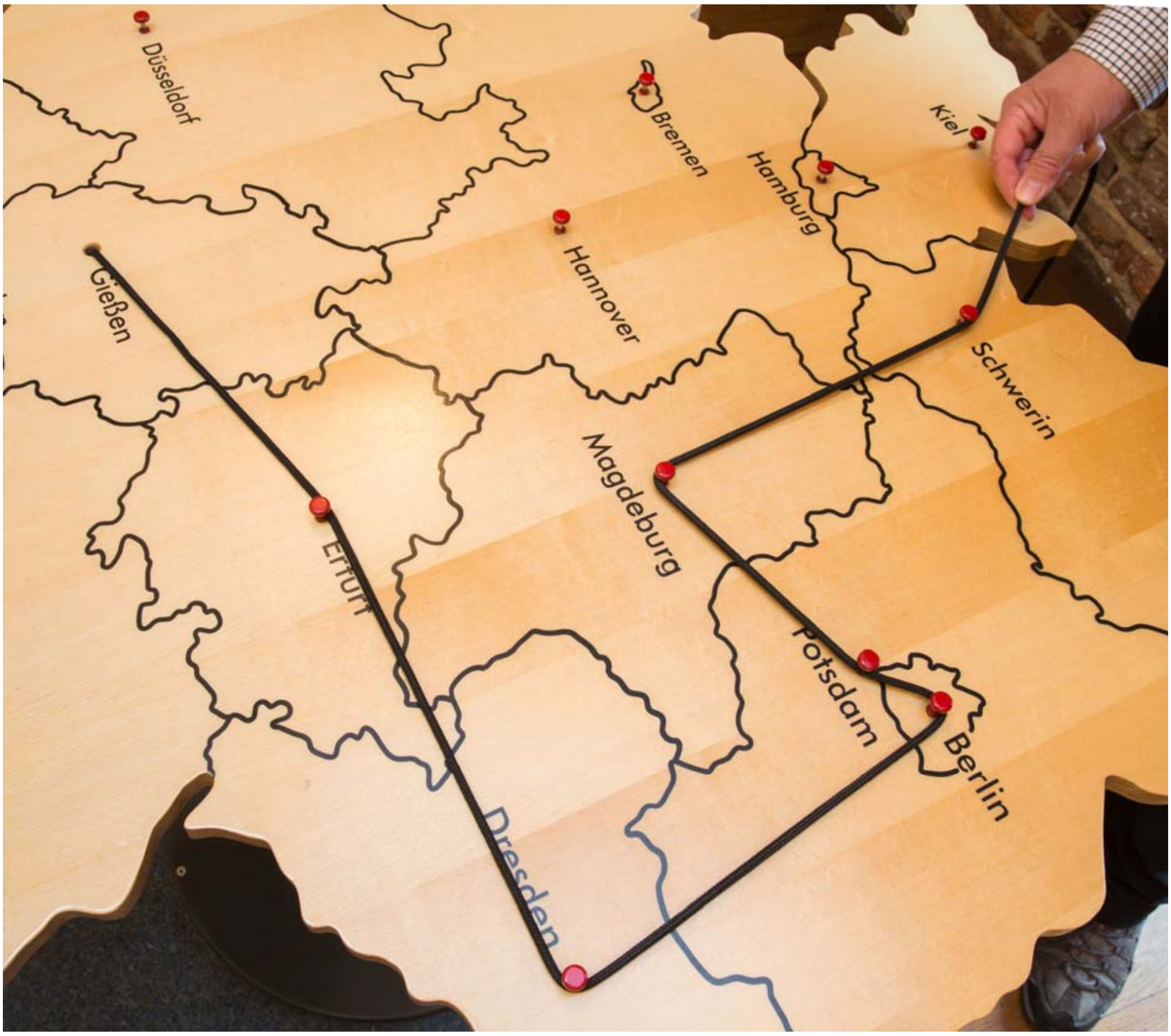




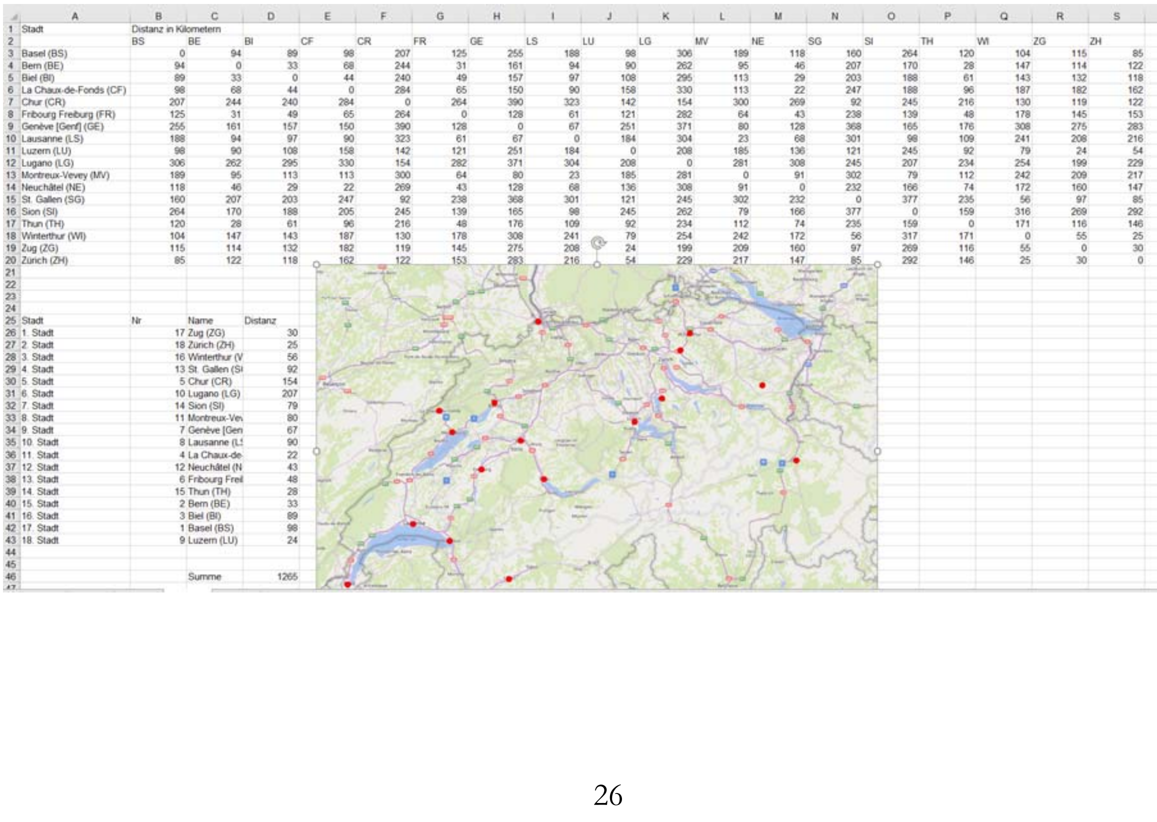
Stadt	Nr	Stadt	Distanz
1. Stadt	14	Schwerin	200
2. Stadt	1	Berlin	27
3. Stadt	12	Potsdam	103
4. Stadt	9	Magdeburg	228
5. Stadt	3	Dresden	220
6. Stadt	5	Erfurt	425
7. Stadt	11	München	210
8. Stadt	15	Stuttgart	210
9. Stadt	13	Saarbrücken	123
10. Stadt	10	Mainz	8
11. Stadt	16	Wiesbaden	166
12. Stadt	4	Düsseldorf	240
13. Stadt	7	Hannover	118
14. Stadt	2	Bremen	110
15. Stadt	6	Hamburg	85
16. Stadt	8	Kiel	139
			2612

Übrigens: diese Deutschlandreise findet sich auch im mathematikum in Gießen

https://www.mathematikum.de/mathematikum-online/gruesse-aus-dem-mathematikum/unsere-lieblingsexponate



So lässt sich auch eine Reise durch die Schweiz durchführen:



Stadt	Distanz in Kilometern																	
	BS	BE	BI	CF	CR	FR	GE	LS	LU	LG	MV	NE	SG	SI	TH	WI	ZG	ZH
Basel (BS)	0	94	89	98	207	125	255	188	98	306	189	118	160	264	120	104	115	85
Bern (BE)	94	0	33	68	244	31	161	94	90	262	95	46	207	170	28	147	114	122
Biel (BI)	89	33	0	44	240	49	157	97	108	295	113	29	203	188	61	143	132	118
La Chaux-de-Fonds (CF)	98	68	44	0	284	65	150	90	158	330	113	22	247	188	96	187	182	162
Chur (CR)	207	244	240	284	0	264	390	323	142	154	300	269	92	245	216	130	119	122
Fribourg Freiburg (FR)	125	31	49	65	264	0	128	61	121	282	64	43	238	139	48	178	145	153
Genève [Genf] (GE)	255	161	157	150	390	128	0	67	251	371	80	128	368	165	176	308	275	283
Lausanne (LS)	188	94	97	90	323	61	67	0	184	304	23	68	301	98	109	241	208	216
Luzern (LU)	98	90	108	158	142	121	251	184	0	208	185	136	121	245	92	79	24	54
Lugano (LG)	306	262	295	330	154	282	371	304	208	0	281	308	245	207	234	254	199	229
Montreux-Vevey (MV)	189	95	113	113	300	64	80	23	185	281	0	91	302	79	112	242	209	217
Neuchâtel (NE)	118	46	29	22	269	43	128	68	136	308	91	0	232	166	74	172	160	147
St. Gallen (SG)	160	207	203	247	92	238	368	301	121	245	302	232	0	377	235	56	97	85
Sion (SI)	264	170	188	205	245	139	165	98	245	262	79	166	377	0	159	316	269	292
Thun (TH)	120	28	61	96	216	48	176	109	92	234	112	74	235	159	0	171	116	146
Winterthur (WI)	104	147	143	187	130	178	308	241	79	254	242	172	56	317	171	0	55	25
Zug (ZG)	115	114	132	182	119	145	275	208	24	199	209	160	97	269	116	55	0	30
Zürich (ZH)	85	122	118	162	122	153	283	216	54	229	217	147	85	292	146	25	30	0

Stadt	Nr	Name	Distanz
1. Stadt	17	Zug (ZG)	30
2. Stadt	18	Zürich (ZH)	25
3. Stadt	16	Winterthur (V	56
4. Stadt	13	St. Gallen (S	92
5. Stadt	5	Chur (CR)	154
6. Stadt	10	Lugano (LG)	207
7. Stadt	14	Sion (SI)	79
8. Stadt	11	Montreux-Ve	80
9. Stadt	7	Genève [Gen	67
10. Stadt	8	Lausanne (L	90
11. Stadt	4	La Chaux-de-	22
12. Stadt	12	Neuchâtel (N	43
13. Stadt	6	Fribourg Frei	48
14. Stadt	15	Thun (TH)	28
15. Stadt	2	Bern (BE)	33
16. Stadt	3	Biel (BI)	89
17. Stadt	1	Basel (BS)	98
18. Stadt	9	Luzern (LU)	24
		Summe	1265

3.10. Oder doch per Hand? - Numerisch Integrieren

Excel kann weder differenzieren noch integrieren. Auch das kann nachgebaut werden. Gegeben sei eine einfache ganzrationale Funktion:

```
y=x³-4,5x²+5x
```

Ihre Stammfunktion lautet:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

oder:

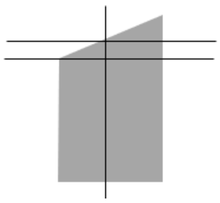
```
F(x) =1/4x^4-3/2x^3+5/2x^2
```

Die beiden Graphen können leicht in einem Diagramm dargestellt werden. Es soll der Wertebereich [-2;5] betrachtet werden. Es gibt verschiedene numerische Verfahren, mit der eine Approximation an das Integral berechnet werden kann. Vier Verfahren sollen hier vorgestellt werden:

3.10.1. Das Trapezverfahren

Die Fläche eines Trapezes berechnet man mit:

```
F = Breite × (H1 + (H2 – H1)/2) = Breite × (H1 + H2)/2
```



Ein Trapez

Das heißt: zerlegt man die Abszisse in verschiedene äquidistante Bereiche, kann man darüber leicht Trapeze aufspannen und ihre Flächen berechnen.

Um die Berechnung dynamisch zu halten werden in zwei Zellen die beiden Werte für Start und Ende eingegeben. In einer dritten Zelle steht der Wert der Anzahl der Intervalle; beispielsweise 100. Daraus berechnet sich die Breite der einzelnen Intervalle.

In der eigentlichen Tabelle, in der die Werte berechnet werden, befindet sich in der ersten Spalte eine laufende Nummer, die sich gemäß den eingegeben Werten dynamisch aufbaut:

```
=WENN(E12<$L$3;E12+1;"")
```

Mit ihrer Hilfe werden die beiden Werte für x_i und x_{i+1} berechnet:

```
=WENN(E13="";"";F12+$L$4)
```

Die beiden Funktionswerte werden berechnet:

```
=WENN(E13="";"";F13^3-4,5*F13^2+5*F13)
```

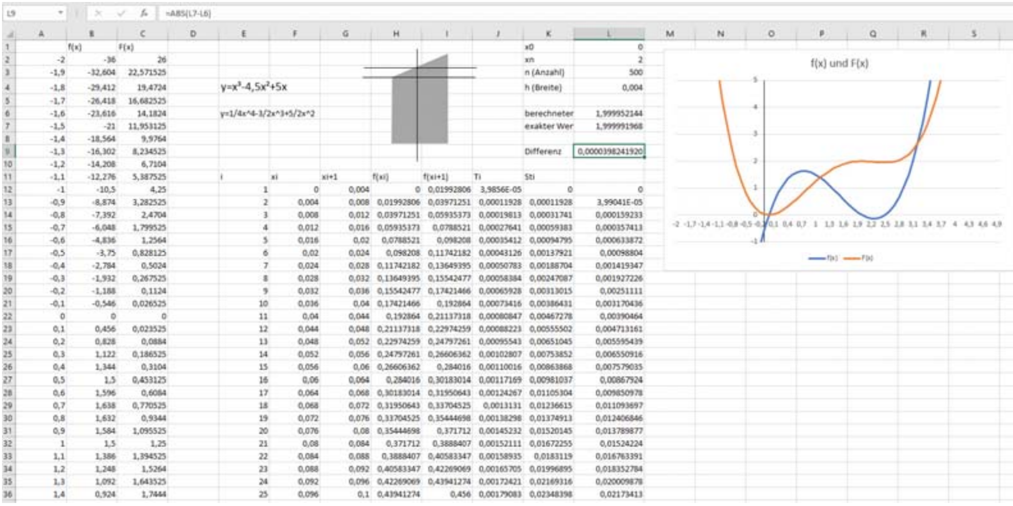
Darauf wird die Fläche des Trapezes bestimmt:

=WENN(E13="";"";$L$4*(H13+I13)/2)

Die Werte werden kumuliert:

=WENN(E13="";"";K12+J13)

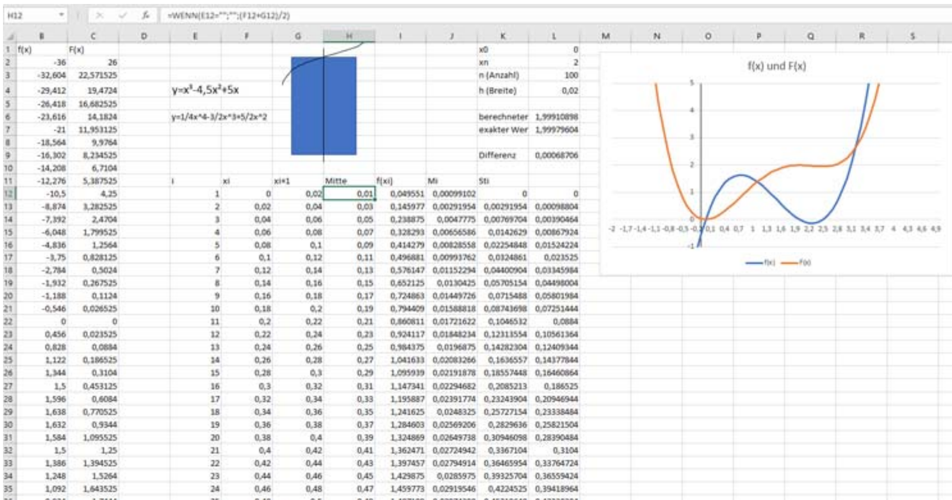
Und können mit dem berechneten Wert verglichen werden. Beim Ändern der Zahlen sieht man schnell, dass bei 100 Teilintervallen in einem Bereich zwischen [-2;5] die Abweichung recht groß ist (21,02), bei 500 Schritten verkleinert sie sich auf



Die Teiltrapeze werden summiert. Je kleiner die Schrittweise, umso genauer die Berechnung.

3.10.2. Das Rechteckverfahren

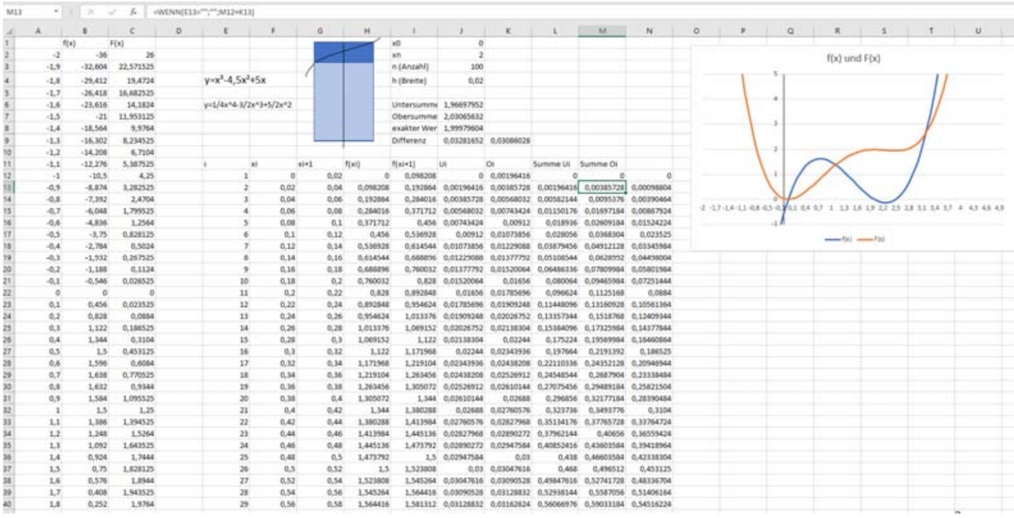
Ähnlich wie das Trapezverfahren funktioniert das Rechteckverfahren. Hierbei wir der Funktionswert des „mittleren" x-Wertes verwendet – darüber wird ein Rechteck aufgespannt; die Flächen der Rechtecke werden summiert.



Die Flächen der Teilrechtecke werden berechnet und summiert.

3.10.3. Das Riemannsche Verfahren

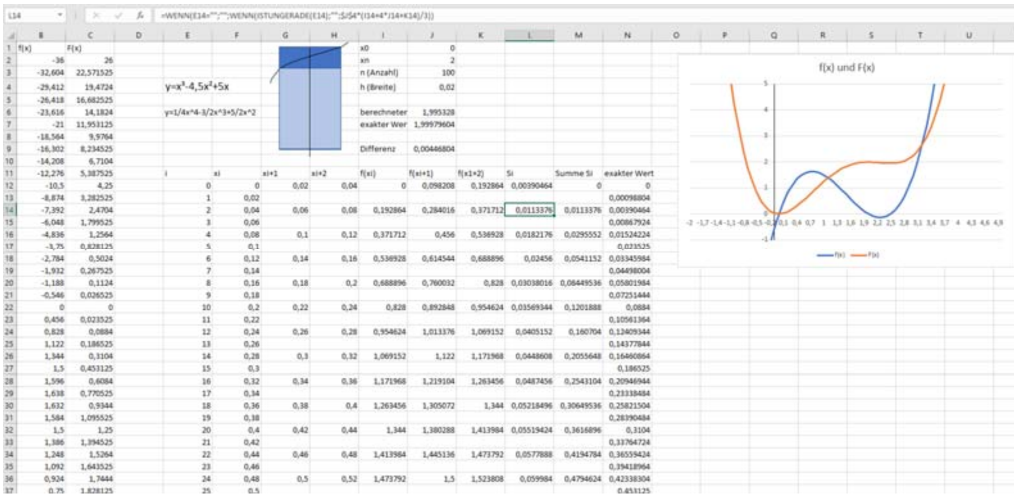
Ähnlich wie das Rechteckverfahren verwendet das Riemannsche Rechtecke. Es wird ein „unteres" Rechteck für x_n und $F(x_n)$ berechnet. Das zweite Rechteck wird für x_{n+1} und $f(x_{n+1})$ berechnet. Die Breiten dieser beiden Rechtecke werden nun immer kleiner gewählt, sodass eine Näherung eintritt.



Das Riemannsche Verfahren arbeitet mit zwei Rechtecken.

3.10.4. Die Simpson Regel

Am besten und schnellsten approximiert man die Fläche einer Kurve durch die Simpson Regel. Zwischen x_n und X_{n+1} wird der mittlere Wert auf der x-Achse gesucht. Zu allen drei Werten wird f(x) berechnet. Nun wird der mittlere Wert mit 4 gewichtet, die anderen beiden einmal. Die Werte werden summiert und durch drei geteilt. Da man nur jeden zweiten Wert verwendet hebt sich die Wichtung (doppelte Fläche) und jeder zweite Wert wieder auf. Auch das kann in einer einfachen Tabelle nachgerechnet werden. Die Schrittweise wird verkleinert – die Berechnung des Integrals wird genauer.



Die numerische Berechnung des Integrals mit Hilfe der Simpson Regel

3.11. Zum Schluss

Hinweis

Ich habe versucht, ein Sudoku mit Hilfe des Solvers zu lösen – jedoch gibt es zu viele Möglichkeiten, die er nicht ausprobieren kann, so dass er „keine realisierbare Lösung" findet. Übrigens: Da in einem Sudoku 40 bis 50 Felder frei sind, müsste man ebenso viele veränderbare Zellen angeben. Damit ist allerdings der Solver überfordert.